



Modelado físico-matemático del péndulo de Furuta de Quanser para la comparación de controladores PD, LQR y adaptativo de orden entero

Autor: Felipe Tomás Paredes Cavieres

Profesor Guía: Gustavo Eduardo Ceballos Benavides

Comisión evaluadora: Alfonso Ehijo Benbow, Ignacio Bugueño Córdova

Memoria para optar al título de Ingeniero Civil Eléctrico de la Universidad de O'Higgins

Rancagua, Chile

Enero, 2025

Dedicatoria y agradecimientos

Quisiera dedicar este trabajo, principalmente a mi familia, a mi madre Claudia, a mi padre Raúl y a mi pareja Genesis, que me han acompañado durante todos estos años, apoyándome en los momentos emocionales difíciles. Todo el esfuerzo y sacrificios realizados convergen en este trabajo final de carrera, donde logro demostrar algunos de los conocimientos y herramientas adquiridas durante este tiempo. Agradezco la comprensión y paciencia que han tenido, esto es para ustedes. También quisiera agradecer a mi profesor guía Gustavo Ceballos, que me dió la oportunidad de trabajar juntos y me ayudó a preparar una memoria que será de utilidad para futuras generaciones, además de haberme acompañado en numerosos ramos de la carrera. Finalmente, quisiera agradecer a todas las amistades que conocí en estos años, que hicieron más llevadero el tiempo en este proceso.

Índice

1. Introducción	7
2. Marco teórico	11
2.1. Análisis de energías de un sistema utilizando el método de Lagrange	11
2.2. Análisis electromecánico	11
2.2.1. Leyes de Kirchhoff	11
2.2.2. Fuerza electromagnética y ley de Lorentz	12
2.2.3. Torque generado por un motor DC	12
2.3. Dinámica rotacional	12
2.4. Controlador PID	13
2.5. Controlador LQR (Linear Quadratic Regulator)	13
2.6. Control Adaptativo	14
2.7. Criterios de Desempeño: ISI e ISE	14
2.8. MATLAB y Simulink	15
3. Estado del arte	16
4. Metodología	17
4.1. Propuesta metodológica	17
4.2. Análisis del péndulo de Furuta	17
4.3. Identificación de variables y parámetros del sistema	17
4.4. Identificación de vectores y energías para el planteamiento de la ecuación de Lagrange	19
4.4.1. Vectores generalizados	19
4.4.2. Energías del sistema	19
4.5. Lagrangiano y ecuaciones de Lagrange	21
4.6. Ecuaciones para el motor DC	22
4.7. Linealización de las ecuaciones del péndulo y representación en el espacio de estados	22
4.8. Control PD para el péndulo invertido rotatorio	23
4.9. Control LQR para el péndulo invertido rotatorio	25
4.10 Control Adaptativo basado en modelo de referencia (MRAC) para el péndulo invertido rotatorio	28
4.11 Swing Up	30
4.12 Péndulo invertido rotatorio Qube Servo 2 de Quanser	32
5. Resultados y discusión	33
5.1. Modelo linealizado, no linealizado y planta real	33

5.2. Análisis de controladores	35
5.3. Controlador PD planta real	35
5.4. Controlador LQR planta real	36
5.5. Controlador Adaptativo simulado	37
5.6. Simulación de seguimiento de referencia para el brazo rotatorio y desempeño de controladores	39
6. Conclusiones	43
7. Referencias	45
8. Anexos	47
8.1. Velocidad de traslación del centro de masa del péndulo	47
8.2. Análisis del motor DC	48
8.3. Linealización de términos	49
8.4. Cálculos para obtener la representación en espacio de estado	49
8.5. Código de MatLab de la representación de estados del sistema lineal	51
8.6. Código en MatLab para encontrar los valores PD	51

Índice de figuras

1. Representación del péndulo invertido, Fuente: Quanser (2021).	18
2. Diagrama del modelo electromecánico del motor DC del péndulo de Furuta. Fuente: Quanser (2021).	22
3. Diagrama de bloques para la ley de control PD, Fuente: Quanser Manual balance control Qube Servo 2.	24
4. Diagrama realizado en simulink para el controlador PD para la planta simulada. Elaboración propia.	25
5. Diagrama realizado en simulink para el controlador PD para la planta real. Elaboración propia.	25
6. Diagrama de bloques para la ley de control LQR, Fuente: Quanser Manual LQR control Qube Servo 2.	26
7. Diagrama realizado en simulink para el controlador LQR para la planta real. Elaboración propia	27
8. Diagrama realizado en Simulink de la implementación del controlador adaptativo de orden entero. Elaboración propia.	29
9. Representación del péndulo en estado de reposo, Fuente: Quanser (2021).	30
10. Diagrama en Simulink de la implementación de Swing Up. Elaboración propia.	32

11. Péndulo invertido rotatorio Qube Servo 2 de Quanser.	32
12. Diagrama realizado en Simulink, comparación entre las salidas de los modelos lineal, no-lineal y planta real frente a un impulso.	33
13. Gráfico de comparación del ángulo del brazo rotatorio θ en grados.	34
14. Gráfico de comparación del ángulo del brazo rotatorio α en grados.	34
15. Voltaje aplicado al motor para balancear y estabilizar el péndulo.	35
16. Ángulo del brazo rotatorio al balancear y estabilizar el péndulo.	35
17. Ángulo del péndulo al ser balanceado y estabilizado en posición invertida.	36
18. Voltaje aplicado al motor para balancear y estabilizar el péndulo.	36
19. Ángulo del brazo rotatorio al balancear y estabilizar el péndulo.	36
20. Ángulo del péndulo al ser balanceado y estabilizado en posición invertida.	37
21. Ángulo del brazo rotatorio con controlador adaptativo simulado.	37
22. Ángulo péndulo con control adaptativo simulado.	37
23. Voltaje requerido para estabilizar el péndulo en posición invertida al iniciar en un ángulo diferente de 0° al utilizar el controlador adaptativo.	38
24. Ángulo del brazo rotatorio con controlador PD.	39
25. Ángulo del brazo rotatorio con controlador LQR.	39
26. Ángulo del brazo rotatorio con controlador Adaptativo.	39
27. Voltaje utilizado con controlador PD.	40
28. Voltaje utilizado con controlador LQR.	40
29. Voltaje utilizado con controlador Adaptativo.	40
30. Ángulo del péndulo con controlador PD.	41
31. Ángulo del péndulo con controlador LQR.	41
32. Ángulo del péndulo con controlador Adaptativo.	41
33. Código de MatLab para la representación en espacio de estados del sistema linealizado.	51
34. Código en MatLab para encontrar los parámetros PD para la planta	51

Índice de cuadros

1. Comparación de controladores en términos de ISE, ISI y J.	6
2. Comparación de voltajes y variaciones de α para diferentes controladores.	6
3. Parámetros técnicos del sistema, Fuente: Quanser Manual, technical parameters (2021).	18
4. Comparación de controladores en términos de ISE, ISI y J.	42
5. Comparación de voltajes y variaciones de α para diferentes controladores.	42

Resumen

En este trabajo se realiza el análisis físico-matemático de energías de sistemas acoplados para obtener las ecuaciones dinámicas que modelan el comportamiento del péndulo invertido rotatorio de Quanser para, posteriormente, aplicar los conocimientos sobre control de sistemas para comparar distintas técnicas de control para su estabilización. Se demuestra mediante gráficos ilustrativos, simulaciones y aplicaciones a la planta real que las técnicas más avanzadas, como el controlador adaptativo de orden entero, presentan mejores índices de desempeño para el seguimiento de referencias, minimización de energía y estabilización del péndulo en posición invertida, en comparación con los controladores LQR y PD. Además, se habilita la planta del péndulo de Furuta ubicada en el laboratorio de máquinas eléctricas de la Universidad de O'Higgins para ser utilizada por las futuras generaciones de estudiantes en el estudio de los controladores PD y LQR de forma práctica y simulada, en adición con la simulación del controlador adaptativo para realizar comparaciones. Los indicadores que demuestran la efectividad del control adaptativo sobre el PD y LQR se aprecian en las comparaciones entre los ISI, ISE y J, además los voltajes que requiere cada controlador y la variación del ángulo en el momento de seguir la referencia. A continuación, se muestran los cuadros respectivos:

Controlador	ISE	ISI	J
PD	$0.002659 \text{ rad}^2 \cdot s$	$0.8789 \text{ rad} \cdot s$	0.881559
LQR	$0.0003646 \text{ rad}^2 \cdot s$	$0.1281 \text{ rad} \cdot s$	0.1284646
Adaptativo	$0.0001558 \text{ rad}^2 \cdot s$	$0.03815 \text{ rad} \cdot s$	0.0383058

Cuadro 1: Comparación de controladores en términos de ISE, ISI y J.

Controlador	Voltaje máximo	Voltaje promedio	Variaciones de α en grados
PD	2.1 V	0.2 V	$[-6^\circ, 6^\circ]$
LQR	1 V	0.2 V	$[-1.5^\circ, 1.5]$
Adaptativo (simulado)	0.22 V	0.01 V	$[-8^\circ, 8^\circ]$

Cuadro 2: Comparación de voltajes y variaciones de α para diferentes controladores.

Los valores del controlador adaptativo fueron obtenidos mediante simulaciones, por lo que se plantea el desafío de la implementación práctica de este, asimismo, la implementación del controlador adaptativo de orden fraccionario puede ser una buena comparación a realizar para próximos hitos de este trabajo. Se destaca el gran potencial que tiene la planta para la práctica y visualización gráfica de la efectividad de distintos controladores, debido a su flexibilidad a la hora de implementarlos en el software de Simulink.

1. Introducción

En la actualidad, los algoritmos de control de sistemas permiten la automatización de procesos complejos en una amplia variedad de industrias modernas, como la manufactura, minería, tratamiento de residuos, sector energético, tratamiento de aguas, refinerías y plantas químicas, entre muchas otras. Estos algoritmos mejoran la eficiencia en términos de tiempo, consumo energético, y la cantidad y calidad de la producción. Además, los algoritmos son clave en la automatización de robots industriales, que realizan tareas precisas ajustando parámetros como fuerza, velocidad o posición en respuesta a las condiciones del proceso y las variaciones del entorno (Ogata, 2010b).

La teoría de control, junto con el modelado matemático de sistemas dinámicos, permite la automatización y estabilización de una amplia gama de sistemas electromecánicos, manteniéndolos dentro de límites preestablecidos para cumplir objetivos específicos. Un ejemplo común, es el clásico controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo), ampliamente utilizado en la industria para regular procesos como el control del volumen de fluido dentro de un estanque en plantas de tratamiento de aguas y químicas (Rodríguez et al., 2021). Este controlador es popular por su flexibilidad y simplicidad de aplicación. Sin embargo, gracias a las simulaciones y avances tecnológicos, ha evolucionado hacia versiones más avanzadas, como el control PID robusto, mejorando su efectividad ante perturbaciones (Vilanova y Alfaro, 2011). De esta manera, se han elaborado otros algoritmos de control, como el Lugar Geométrico de las Raíces y el Control Óptimo Cuadrático Lineal (LQR), que son técnicas aplicadas comúnmente a sistemas más complejos, donde se ha demostrado su mayor eficiencia en estabilización. Adicionalmente, existen técnicas de control más avanzadas, como el control adaptivo de orden entero, que presenta aún más mejoras en la eficiencia de la estabilización de un sistema, ya que cuenta con la capacidad de adaptarse a los cambios en su dinámica en tiempo real y presenta mayor robustez frente a perturbaciones externas, donde Acosta y colaboradores (2023) demostraron sus ventajas frente al controlador PID. Asimismo, es aplicable a sistemas simples con dos grados de libertad, tal como demostró Marcos y colaboradores (2023) en su aplicación en la estabilización del ángulo de pitch de una aeronave, una dinámica similar a la que presenta el péndulo de Furuta, que también es un sistema subactuado y no lineal.

El péndulo invertido rotativo, o péndulo de Furuta, fue inventado por Katsuhisa Furuta en 1992 en el Instituto de Tecnología de Tokio. Este sistema dinámico es no lineal y subactuado, lo que significa que tiene más grados de libertad que variables de control (Furuta, 2003). Ha sido utilizado para validar algoritmos avanzados de control y ha servido como base para estudiar el comportamiento de sistemas más complejos, como satélites y robots.

En este trabajo se realiza un análisis y comparación de las distintas técnicas de control convencionales, como PID y Control óptimo LQR con técnicas de control avanzadas del tipo adaptivo de orden entero aplicadas a la estabilización del ángulo vertical del péndulo de Furuta frente a perturbaciones externas. Este análisis comparativo tiene como objetivo demostrar la efectividad de este algoritmo de control más avanzado en la estabilización de un sistema clásico, donde se pretende aumentar la eficiencia del controlador en términos de tiempo y energía.

Hipótesis de investigación

El uso de técnicas de control avanzadas, como el controlador LQR y adaptivo de orden entero, mejora significativamente las eficiencias en la estabilización del ángulo vertical del péndulo de Furuta en comparación con el controlador PD, específicamente en términos de tiempo de respuesta y consumo de energía.

La evaluación de la efectividad de los diferentes controladores se basará en mediciones del tiempo de estabilización del sistema, la magnitud del voltaje aplicado al motor DC para generar el torque necesario y el tiempo que tarda el péndulo en regresar a su posición de equilibrio tras una perturbación externa. Para esto, se realizarán simulaciones del sistema en MATLAB y Simulink, generando gráficos comparativos que permitirán visualizar el desempeño de las técnicas de control en los escenarios propuestos, además de utilizar métricas de desempeño como son el integral of square error (ISE) e integral squared input (ISI).

Objetivo general y específicos

Aplicar el método de Euler–Lagrange de análisis de energías de un sistema para comparar el desempeño de los algoritmos de control PD, control óptimo LQR y control adaptativo de orden entero en el péndulo invertido rotatorio de forma simulada y práctica.

- Realizar el modelado físico–matemático del péndulo invertido rotatorio mediante el enfoque de Euler–Lagrange, identificando las variables de entrada y salida para obtener su representación en espacio de estados.
- Diseñar los controladores PD, LQR y Adaptativo en forma de diagrama de bloques que proporcionarán la estabilidad vertical del péndulo y realizar simulaciones en los softwares MatLab y Simulink.
- Implementar los controladores de forma práctica en el péndulo invertido rotatorio para analizar su comportamiento.
- Realizar las comparaciones de los distintos controladores para el sistema simulado y práctico.
- Dejar en funcionamiento el Péndulo de Furuta de la empresa Quanser para que pueda ser utilizada en la enseñanza de los cursos de control de la Universidad de O'Higgins.

2. Marco teórico

En esta sección, se detalla cada uno de los métodos matemáticos que se aplican en el análisis físico de la planta, controladores y técnicas de medición de desempeño:

2.1. Análisis de energías de un sistema utilizando el método de Lagrange

El enfoque de Lagrange se basa en la energía involucrada en un sistema para obtener sus ecuaciones de movimiento. A diferencia del enfoque de Newton, que utiliza directamente las fuerzas y los torques aplicados a cada cuerpo, el enfoque de Lagrange trabaja con las energías (cinética y potencial), lo que puede simplificar el análisis, especialmente para sistemas complejos o con restricciones, como es el caso para el péndulo de Furuta (Arnold, 1989).

2.2. Análisis electromecánico

A continuación, se detallan los conceptos fundamentales que se aplicarán en el análisis completo del comportamiento del motor DC:

2.2.1. Leyes de Kirchhoff

- Ley de corrientes: Esta ley establece que la suma algebraica de las corrientes que entran y salen de un nodo (o unión) en un circuito es igual a cero. Matemáticamente, se expresa como:

$$\sum_{i=1}^n I_{\text{entrada}} = \sum_{i=1}^n I_{\text{salida}}, \quad (1)$$

Esto implica que la corriente que fluye hacia un nodo es igual a la corriente que fluye desde él. Esta ley se basa en la conservación de la carga eléctrica.

- Ley de voltajes: establece que la suma algebraica de las diferencias de potencial (voltajes) en un lazo cerrado de un circuito es igual a cero. Esto se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^n V = 0, \quad (2)$$

Esto significa que la energía que se suministra en el lazo (como la que proviene de baterías o fuentes de voltaje) es igual a la energía que se consume (como la que se pierde en resistencias o dispositivos eléctricos). Esta ley se basa en la conservación de la energía (Vázquez, 2004).

2.2.2. Fuerza electromagnética y ley de Lorentz

Un motor DC convierte energía eléctrica en energía mecánica mediante el principio de electromagnetismo. Cuando una corriente eléctrica pasa a través de las bobinas de alambre en el motor, se genera un campo magnético. Este campo interactúa con un campo magnético permanente (o también generado por otros electroimanes) que está presente en el motor.

La fuerza que actúa sobre un conductor que lleva corriente en un campo magnético está dada por la Ley de Lorentz:

$$\vec{F} = \vec{I} \cdot L \times \vec{B}, \quad (3)$$

donde I es la corriente, L es el vector que representa la longitud del conductor en el campo magnético, y B es la densidad de flujo magnético. Esta fuerza genera un torque en el rotor del motor.

2.2.3. Torque generado por un motor DC

El torque τ es el producto de la fuerza aplicada y la distancia desde el eje de rotación hasta el punto de aplicación de la fuerza. En el caso de un motor, el torque se puede expresar como:

$$\tau = k_t \cdot I, \quad (4)$$

donde k_t es una constante que se determina a partir de las propiedades físicas del motor, como el número de vueltas en las bobinas y el flujo magnético, por lo que es una característica fija que relaciona el torque con la corriente, y I es la corriente que fluye a través de las bobinas. A medida que se aplica una carga al motor, la corriente aumentará para generar el torque necesario para superar la resistencia. Esto se traduce en un aumento en el torque producido por el motor (Chapman, 2012).

2.3. Dinámica rotacional

La dinámica rotacional está íntimamente relacionada con las leyes de Newton, específicamente con la segunda ley, que establece que la fuerza resultante actuando sobre un objeto es igual a la masa del objeto multiplicada por su aceleración:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad (5)$$

De manera análoga, para el movimiento rotacional, se define el torque (τ) como:

$$\tau_{\text{net}} = I \cdot \alpha + \tau_{\text{fricción}}, \quad (6)$$

donde I es el momento de inercia del objeto y α es la aceleración angular. Además $\tau_{\text{fricción}} = b \cdot \dot{\theta}$, que representa las pérdidas de energía del sistema debido a los coeficientes de fricción presentes en los acoples (Josephs Huston, 2002).

2.4. Controlador PID

El controlador PID (Proporcional, Integral, Derivativo) es uno de los métodos de control más comunes y ampliamente utilizados en la ingeniería de control. Este controlador tiene como objetivo minimizar el error entre una señal de referencia y la salida del sistema al aplicar una combinación de tres términos: proporcional, integral y derivativo. Se define matemáticamente como:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{d}{dt} e(t), \quad (7)$$

2.5. Controlador LQR (Linear Quadratic Regulator)

El controlador LQR es una técnica de control óptimo utilizada en sistemas dinámicos lineales para minimizar un costo cuadrático asociado con el estado y el control del sistema. Esta técnica se basa en el principio de optimización, donde se define una función de costo que penaliza tanto el error de estado como la magnitud de la señal de control. El objetivo del controlador LQR es encontrar una ley de control que minimice esta función de costo, que tiene la siguiente forma:

$$J = \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt, \quad (8)$$

El controlador genera una señal de control $u(t)$ en función de los estados del sistema $x(t)$:

$$u(t) = -Kx(t), \quad (9)$$

donde K es la matriz de ganancia calculada a partir de la solución de una ecuación de Riccati, que depende de las matrices Q y R .

2.6. Control Adaptativo

El control adaptativo es una estrategia de control que ajusta de forma automática los parámetros del controlador en tiempo real para adaptarse a las variaciones en el sistema o incertidumbres en su modelo dinámico. A diferencia de las técnicas tradicionales como el PID o LQR, que requieren un modelo exacto del sistema, el control adaptativo es capaz de modificar sus parámetros en función del comportamiento observado del sistema durante la operación. Lo que es útil cuando las condiciones del sistema cambian o cuando los parámetros del modelo no son conocidos con precisión. Este controlador se basa en la idea de modificar los parámetros del controlador en función de las señales de error y las dinámicas del sistema.

El objetivo es diseñar una ley de control $u(t) = \theta^T(t)\omega(t) - \text{sgn}(k_p)e_1(t)\bar{\omega}^T(t)\bar{\omega}(t)$, donde θ es el vector de parámetros adaptativos que se ajustan en función de la evolución del sistema. Estos parámetros se actualizan dependiendo del sistema a controlar. En general, el proceso consta de la adaptación del modelo, donde el controlador ajusta los parámetros del sistema para acercarse lo más posible a su comportamiento real, para luego generar la acción de control u que reduce el error e y asegura la estabilidad del sistema.

2.7. Criterios de Desempeño: ISI e ISE

Estos criterios se utilizan comúnmente para evaluar la calidad del desempeño de un sistema de control. Ambos permiten cuantificar el error acumulado en el tiempo, aunque con enfoques diferentes. Donde el criterio ISE mide la suma acumulada del error al cuadrado a lo largo del tiempo, y se define matemáticamente como:

$$ISE = \int_0^t e(t)^2 dt, \quad (10)$$

Donde $e(t)$ representa el error, definido como la diferencia entre la señal de referencia y la salida del sistema en el tiempo t . La característica principal es que se penalizan significativamente los errores grandes, haciendo que el sistema trate de corregirlos rápidamente. Es adecuado para sistemas donde las grandes desviaciones iniciales pueden afectar la estabilidad o el desempeño general. El criterio ISI mide la integral del valor absoluto del error a lo largo del tiempo, y se expresa como:

$$ISI = \int_0^t |e(t)| dt, \quad (11)$$

Este criterio es adecuado para sistemas donde el error acumulado en el tiempo es más relevante que la magnitud puntual de este.

2.8. MATLAB y Simulink

MATLAB es un entorno de desarrollo y un lenguaje de programación numérica utilizado ampliamente en la ingeniería para el análisis, simulación y visualización de sistemas. Permite realizar cálculos matemáticos complejos, manipulación de matrices y resolución de ecuaciones diferenciales, lo cual es esencial en el modelado de sistemas dinámicos como el péndulo de Furuta.

Simulink, por su parte, es una plataforma de simulación gráfica que se integra con MATLAB y permite modelar sistemas dinámicos mediante diagramas de bloques. Este enfoque facilita la representación visual de modelos complejos, como los involucrados en el análisis de sistemas mecánicos y electrónicos. En particular, Simulink es una herramienta útil para simular el comportamiento del péndulo de Furuta bajo diferentes técnicas de control, como PID, LQR o control adaptativo, proporcionando una manera intuitiva de verificar el rendimiento de los controladores en diversas condiciones.

El uso combinado de MATLAB y Simulink en este trabajo permite no solo la simulación de las ecuaciones de movimiento del sistema, sino también la implementación y evaluación de algoritmos de control en un entorno virtual, lo que facilita el análisis de resultados y la optimización de parámetros de control sin necesidad de realizar experimentos físicos previos. Estas herramientas también ofrecen la posibilidad de realizar análisis de estabilidad, realizar pruebas de perturbaciones externas y comparar el rendimiento de distintas estrategias de control en tiempo y eficiencia energética.

3. Estado del arte

El péndulo de Furuta ha sido ampliamente utilizado como un sistema de referencia para verificar la efectividad de diversas estrategias de control, debido a su relativa simplicidad en términos experimentales y sus características no lineales que desafían los enfoques tradicionales. En este estado del arte, se revisan trabajos relevantes que investigan el desempeño de controladores clásicos y avanzados aplicados a este sistema, con énfasis en PID, LQR, Fuzzy y predictivos.

Salazar (2018) demostró la efectividad del controlador LQR en comparación con el PID y Fuzzy al analizar el desempeño de estos métodos en la estabilización del péndulo de Furuta. Para ello, desarrolló experimentalmente un prototipo, derivó sus ecuaciones dinámicas y diseñó los controladores. Su análisis incluyó la evaluación de la integral del error absoluto mediante numerosas pruebas de estabilización en la posición invertida. Los resultados mostraron que el controlador LQR redujo significativamente las oscilaciones y ofreció una mejor respuesta frente a perturbaciones externas.

Por otro lado, González et al. (2016) realizaron una comparación entre el controlador Fuzzy y el control predictivo mediante simulaciones en MATLAB. Su estudio evidenció que el controlador Fuzzy puede llevar el péndulo desde su posición de reposo a la posición invertida en solo un segundo, destacando su capacidad de respuesta rápida. En tanto, el control predictivo mostró ventajas significativas al permitir restricciones explícitas en las variables de entrada y salida, lo que resultó en una mayor efectividad al amortiguar perturbaciones externas.

Adicionalmente, Palacio (2015) implementó un controlador adaptativo para estabilizar el péndulo de Furuta en su posición invertida. Su investigación incluyó una simulación 3D del sistema, destacando la capacidad del controlador adaptativo para cumplir con los objetivos de estabilización en entornos simulados. Sin embargo, no se exploraron aplicaciones prácticas ni comparaciones con otros controladores.

Estos trabajos destacan los avances en el uso de diversas técnicas de control aplicadas al péndulo de Furuta. Sin embargo, ninguno aborda de manera específica la comparación entre los controladores PID, LQR y adaptativo aplicados a la planta Qube Servo 2 de Quanser. Este vacío en la literatura respalda la relevancia de esta investigación, que busca evaluar y comparar la eficiencia de estos tres controladores en términos de tiempo y consumo energético frente a perturbaciones externas.

4. Metodología

4.1. Propuesta metodológica

La metodología que se utilizará para abordar este trabajo, consta de cuatro partes fundamentales: El modelado matemático del sistema dinámico y su representación en espacio de estados, la elaboración de los diferentes algoritmos de control para este caso específico (PID, LQR, adaptativo de orden entero) y la realización de las simulaciones comparativas de cada caso, junto con la implementación de estos algoritmos en la planta real.

4.2. Análisis del péndulo de Furuta

Este sistema consta de: Una base rotatoria que está controlada por un motor DC que genera un torque, que permite un movimiento angular en los ejes XY, lo que a su vez induce el balanceo del péndulo, que está conectado al brazo rotatorio de forma perpendicular, lo que permite un movimiento oscilatorio en el plano YZ. El objetivo es mantener la estabilidad vertical del péndulo a través del torque aplicado a la base giratoria, compensando el movimiento ante perturbaciones, se define un sistema de referencia en tres dimensiones (X, Y, Z), donde el origen coincide con el brazo rotatorio, de modo que el centro de masa del péndulo (en posición vertical hacia abajo) se encuentra en el eje Z negativo y ,al ubicarse en su posición vertical hacia arriba, su centro de masa se ubica en el eje Z positivo, tal como se muestra en la Figura 1.

4.3. Identificación de variables y parámetros del sistema

Para comenzar con este trabajo, se realiza el análisis de las componentes que describen la posición del péndulo y el comportamiento del circuito interno del motor DC:

- α es el ángulo del péndulo respecto a la vertical,
- $\dot{\alpha}$ es la velocidad del ángulo del péndulo respecto a la vertical,
- $\ddot{\alpha}$ es la aceleración del ángulo del péndulo respecto a la vertical,
- θ es el ángulo del brazo respecto a la horizontal,
- $\dot{\theta}$ es la velocidad angular del brazo respecto a la horizontal,
- $\ddot{\theta}$ es la aceleración angular del brazo respecto a la horizontal,
- J_r es el momento de inercia del brazo rotatorio,
- J_p es el momento de inercia del péndulo,
- τ es el torque aplicado por el motor DC,

- v_m : Voltaje aplicado al motor.
- i_m : Corriente que circula por el motor.
- $\dot{\theta}_m$: Velocidad angular del eje del motor.

Estas variables se complementan junto con los siguientes parámetros proporcionados por la hoja de datos del fabricante:

Cuadro 3: Parámetros técnicos del sistema, Fuente: Quanser Manual, technical parameters (2021).

Variable	Descripción	Valor
L_p	Longitud del péndulo	0.129 m
r	Longitud del brazo rotatorio	0.085 m
b_r	Coeficiente de fricción del brazo rotatorio	$1 \times 10^{-3} \text{ Nms/rad}$
b_p	Coeficiente de fricción del péndulo	$5 \times 10^{-5} \text{ Nms/rad}$
l	Centro de masa del péndulo	0.0645 m
m_p	Masa del péndulo	0.024 kg
g	Aceleración debido a la gravedad	9.81 m/s^2
R_m	Resistencia del motor	8.4Ω
k_m	Constante de fuerza contraelectromotriz	0.042 Vs/rad
k_t	Constante de torque del motor	0.042 Nm/A

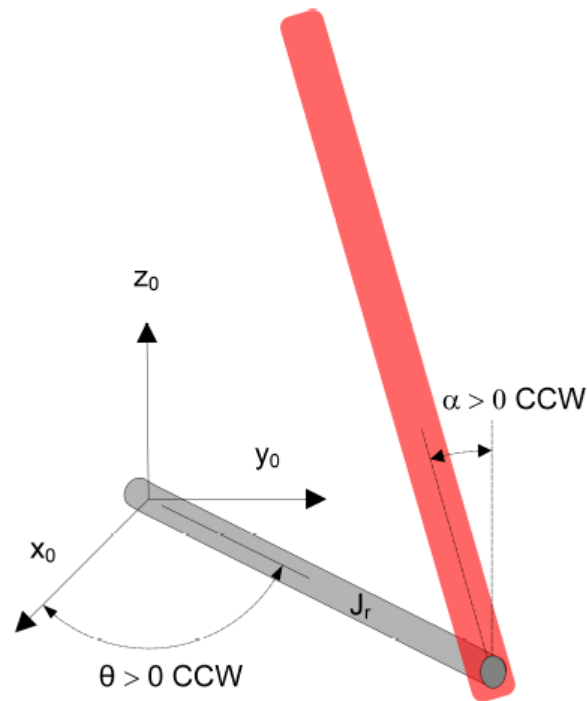


Figura 1: Representación del péndulo invertido, Fuente: Quanser (2021).

4.4. Identificación de vectores y energías para el planteamiento de la ecuación de Lagrange

A continuación, se utilizará el análisis de energía de sistemas dinámicos de Lagrange, lo que simplifica los cálculos en el análisis de sistemas complejos que involucran múltiples acoplamientos, como lo es este caso. Se identifican los vectores que describen la dinámica del sistema y las energías involucradas:

4.4.1. Vectores generalizados

- Vector de Posiciones Generalizadas (q): Describe la configuración del sistema. En este caso, se define como:

$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad (12)$$

donde θ es el ángulo de la base rotatoria y α es el ángulo del péndulo.

- Vector de Velocidades Generalizadas ($\dot{q}$): Contiene las derivadas temporales de las variables generalizadas, representando las velocidades de los ángulos:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

donde $\dot{\theta}$ es la velocidad angular de la base rotatoria y $\dot{\alpha}$ es la velocidad angular del péndulo.

- Vector de Fuerzas Generalizadas (Q): Incluye las fuerzas que actúan sobre el sistema, entradas al sistema y los torques de fricción, que van en dirección opuesta al movimiento. En este caso, las fuerzas generalizadas incluyen el torque generado por el motor DC y las pérdidas debido a la fricción del brazo rotatorio y del péndulo. Considerando lo anterior, el vector queda de la siguiente manera:

$$Q = \begin{bmatrix} \tau - b_r \dot{\theta} \\ -b_p \dot{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

4.4.2. Energías del sistema

Se definen las coordenadas de la posición del centro de masa del péndulo en (x, y, z) al estar en posición vertical hacia arriba: $x = r \cos \theta + l \sin \alpha \cos \theta$, $y = r \sin \theta + l \sin \alpha \sin \theta$, $z = l \cos \alpha$. Y se procede a realizar el análisis de energías involucradas:

- Energía cinética T : La energía cinética total T del sistema incluye la energía cinética del brazo rotatorio y la del péndulo. El brazo rotatorio gira alrededor de su eje con momento de inercia J_r y velocidad angular $\dot{\theta}$, por lo que su energía cinética es:

$$T_r = \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2, \quad (15)$$

El péndulo, por otro lado, tiene dos componentes de energía cinética: la debida a su traslación y la debida a su rotación.

- La energía cinética traslacional está dada por el movimiento del centro de masa, el cual se mueve en un arco circular, por lo que:

$$v_{cm}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \quad (16)$$

Sustituyendo las componentes de las derivadas de las posiciones en coordenadas generalizadas y al resolver (Ver Anexo 8.1), se obtiene:

$$v_{cm}^2 = \left(r\dot{\theta} \right)^2 + (l\dot{\alpha})^2 + 2rl\dot{\theta}\dot{\alpha} \cos \alpha, \quad (17)$$

La energía cinética traslacional es entonces:

$$T_{tras} = \frac{1}{2} m_p v_{cm}^2, \quad (18)$$

Sustituyendo la expresión de v_{cm}^2 :

$$T_{tras} = \frac{1}{2} m_p \left[\left(r\dot{\theta} \right)^2 + (l\dot{\alpha})^2 + 2rl\dot{\theta}\dot{\alpha} \cos \alpha \right], \quad (19)$$

- La energía cinética rotacional del péndulo, debido a su rotación alrededor del centro de masa, es:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2, \quad (20)$$

Por lo tanto, la energía cinética total del péndulo es:

$$T_p = \frac{1}{2} m_p \left[\left(r\dot{\theta} \right)^2 + (l\dot{\alpha})^2 + 2rl\dot{\theta}\dot{\alpha} \cos \alpha \right] + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2, \quad (21)$$

Por lo que la energía cinética total del sistema es:

$$T = \frac{1}{2}m_p \left[\left(r\dot{\theta} \right)^2 + (l\dot{\alpha})^2 + 2rl\dot{\theta}\dot{\alpha} \cos \alpha \right] + \frac{1}{2}J_p\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}J_r\dot{\theta}^2, \quad (22)$$

- Energía potencial gravitatoria U : La energía potencial U del sistema proviene de la altura (posición en el eje z) del centro de masa del péndulo, que es $l \cos(\alpha)$, lo que quiere decir que, cuando $\alpha = 0$, el péndulo alcanza su altura máxima, que es cuando está en posición vertical hacia arriba, por lo que la energía potencial es:

$$U = m_p g L_p \cos(\alpha), \quad (23)$$

4.5. Lagrangiano y ecuaciones de Lagrange

Al reemplazar en el Lagrangiano del sistema, sustituir las expresiones de las energías y plantear las ecuaciones para ambos ángulos:

$$L = \frac{1}{2}m_p \left[\left(r\dot{\theta} \right)^2 + (L_p\dot{\alpha})^2 + 2rL_p\dot{\theta}\dot{\alpha} \cos(\alpha) \right] + \frac{1}{2}J_t\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_p\dot{\alpha}^2 - m_p g L_p \cos(\alpha), \quad (24)$$

Para θ , se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau - b_r \dot{\theta}, \quad (25)$$

Para α , se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = -b_p \dot{\alpha}, \quad (26)$$

Al resolver lo anterior, las ecuaciones finales que describen el comportamiento del sistema son:

- Para θ :

$$(J_r + J_p \sin^2(\alpha))\ddot{\theta} + m_p l r \cos(\alpha)\ddot{\alpha} + 2J_p \sin(\alpha) \cos(\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} - m_p l r \sin(\alpha)\dot{\alpha}^2 = \tau - b_r \dot{\theta} \quad (27)$$

,

- Para α :

$$J_p \ddot{\alpha} + m_p l r \cos(\alpha)\ddot{\theta} - J_p \sin(\alpha) \cos(\alpha)\dot{\theta}^2 + m_p g l \sin(\alpha) = -b_p \dot{\alpha} \quad (28)$$

,

4.6. Ecuaciones para el motor DC

Ya con las ecuaciones de la dinámica de los ángulos del péndulo, se continúa con el análisis completo del motor DC, cuya representación se visualiza en la Figura 2:

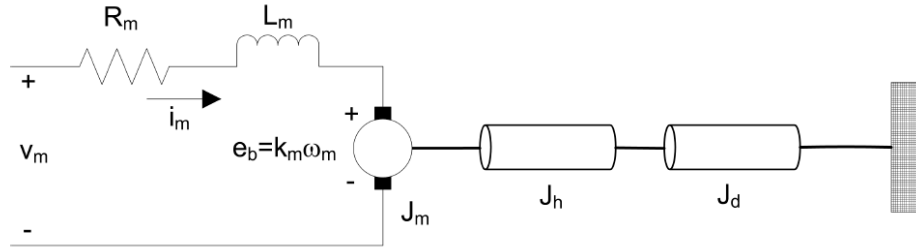


Figura 2: Diagrama del modelo electromecánico del motor DC del péndulo de Furuta. Fuente: Quanser (2021).

Donde al aplicar el análisis eléctrico, mecánico y rotacional, se obtienen las siguientes ecuaciones (Ver Anexo 8.2):

- Análisis eléctrico:

$$i_m(t) = \frac{v_m(t) - k_m \dot{\theta}_m(t)}{R_m}, \quad (29)$$

- Análisis mecánico:

$$\tau_m(t) = k_t \frac{v_m(t) - k_m \dot{\theta}_m(t)}{R_m}, \quad (30)$$

- Análisis rotacional:

$$J_{eq} \ddot{\theta}_m(t) = k_t \frac{v_m(t) - k_m \dot{\theta}_m(t)}{R_m} - b_m \dot{\theta}_m(t), \quad (31)$$

Las ecuaciones (6), (7) y (8) permiten modelar el comportamiento del motor, desde el voltaje aplicado y la corriente hasta el torque generado. El torque del motor (τ_m) se introduce en la ecuación del ángulo θ , cerrando el lazo entre el motor y los movimientos del péndulo y el brazo.

4.7. Linealización de las ecuaciones del péndulo y representación en el espacio de estados

El objetivo es controlar α de manera que el péndulo permanezca en posición vertical hacia arriba, y se mantenga en esa posición permitiendo pequeñas variaciones. Por lo tanto, para diseñar los controladores de este estudio, se debe linealizar el sistema no lineal, ya que estos están definidos para controlar plantas lineales. Para lograr lo anterior, se realizan las aproximaciones $\sin(\alpha) \approx \alpha$ $\cos(\alpha) \approx 1$ (Ver Anexo 8.3), las ecuaciones para θ y α quedan:

$$J_r \ddot{\theta} + m_p l r \ddot{\alpha} = \tau - b_r \dot{\theta}, \quad (32)$$

$$J_p \ddot{\alpha} + m_p l r \ddot{\theta} + m_p g l \alpha = -b_p \dot{\alpha}, \quad (33)$$

Con el análisis completo del sistema, se procede a llevar las ecuaciones a la teoría de control de sistemas, donde es útil representar la dinámica del péndulo en variables de estado, de la forma $Ax + Bu$, para posteriormente realizar simulaciones con los diferentes controladores de interés (LQR, PID y control adaptativo de orden entero). Al realizar los cálculos necesarios a las ecuaciones anteriores (Ver Anexo 8.4), además de definir $\theta = x_1$, $\alpha = x_2$, $\dot{\theta} = x_3$, $\dot{\alpha} = x_4$, y $u = \tau$, se pueden encontrar las matrices A y B y representar el sistema en el espacio de estados:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m_p l^2 r g}{J_t} & -\frac{b_r J_p}{J_t} & \frac{m_p l r b_p}{J_t} \\ 0 & -\frac{m_p g l J_r}{J_t} & \frac{m_p l r b_r}{J_t} & -\frac{J_p b_p}{J_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{J_p}{J_t} \\ -\frac{m_p l r}{J_t} \end{bmatrix} \tau, \quad (34)$$

Con esta representación, es posible implementar el sistema en MatLab para realizar las primeras simulaciones para el análisis de la dinámica del péndulo.

4.8. Control PD para el péndulo invertido rotatorio

El objetivo principal es estabilizar el péndulo en posición vertical hacia arriba y que se mantenga en esta posición a pesar de las perturbaciones externas. Para esto se implementará un controlador PD, que establezca el péndulo en la posición deseada, esta variante del controlador PID se utiliza en situaciones específicas para facilitar la sintonización de los parámetros K, además la acción integral del controlador PID puede generar oscilaciones no deseadas si no está sintonizada con la precisión requerida, que es lo que se quiere reducir al momento de estabilizar el péndulo. Para comenzar, se establece la siguiente ley de control PD multivariable, donde se controla el ángulo del brazo rotatorio (θ) y el ángulo del péndulo (α):

$$u = k_{p,\theta}(\theta_r - \theta) - k_{p,\alpha}\alpha - k_{d,\theta}\dot{\theta} - k_{d,\alpha}\dot{\alpha}, \quad (35)$$

donde u es la señal de control que representa el torque aplicado al motor DC. Se establece un ángulo deseado de referencia para el brazo rotatorio, que se resta a la posición actual y se multiplica por la correspondiente ganancia $K \cdot P$, para el ángulo del péndulo, no es necesario establecer una referencia, ya que éste se estabiliza en 0. Las ganancias K_p de cada ángulo corrigen la intensidad de desviación de los ángulos y las ganancias K_d introducen un efecto amortiguador para suavizar los movimientos del brazo y del péndulo. En general, esta ley de control actúa para

corregir rápidamente la posición de los ángulos ante una variación con respecto a la referencia. A continuación se muestra el diagrama de bloques correspondiente para esta ley de control:

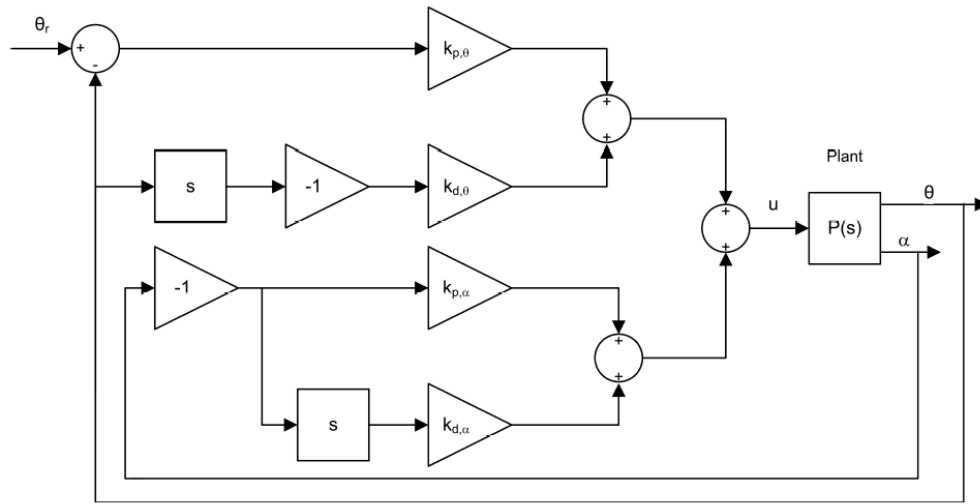


Figura 3: Diagrama de bloques para la ley de control PD, Fuente: Quanser Manual balance control Qube Servo 2.

Como se ha mencionado anteriormente, el péndulo se encuentra en su posición vertical hacia arriba cuando el ángulo α es igual a 0. Para comenzar, se establece que el controlador se activará cuando el ángulo varíe entre el intervalo $[-10, 10]$, estos valores pueden ser modificados para verificar la efectividad del controlador. Dado que el péndulo parte desde su posición colgante, se requiere de forma manual su elevación hasta que el ángulo se encuentre en el intervalo señalado anteriormente. Posteriormente en este trabajo, se indicará una forma de elevar el péndulo de forma automática.

Las ganancias K_p y K_d para ambos ángulos están dadas por el fabricante, estas ganancias pueden obtenerse variando manualmente los parámetros, donde usualmente se seleccionan pequeños valores para K_p y, para K_d , son fracciones de K_p , donde el valor se aumenta para amortiguar los errores. Adicionalmente, MatLab proporciona la herramienta "pidtune", que calcula automáticamente los valores PD requeridos para la planta (Ver Anexo 8.6), sin embargo, para este trabajo, se utilizarán los valores recomendados por el fabricante, las cuales son $[K_{p_\alpha} = 30, K_{d_\alpha} = 2.5, K_{p_\theta} = -2, K_{d_\theta} = -2]$. A continuación, se muestra el diagrama del sistema realizado en simulink para la planta real y simulada (Ver Figuras 4 y 5), donde se establece una referencia de $[-30^\circ, 30^\circ]$ para el ángulo del brazo rotatorio y 0 para el ángulo del péndulo. Además, se incorpora un filtro pasa-bajo para suavizar la señal de los ángulos y facilitar el control sin convertir directamente los ángulos en las velocidades angulares. De forma general, este filtro atenúa las altas frecuencias de los ángulos para que el sistema responda de manera más estable y controlable.

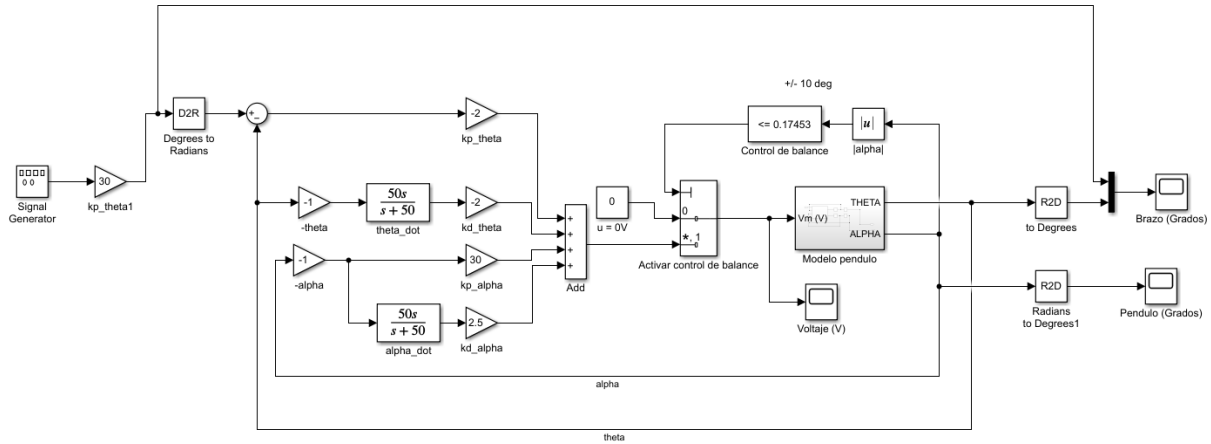


Figura 4: Diagrama realizado en simulink para el controlador PD para la planta simulada. Elaboración propia.

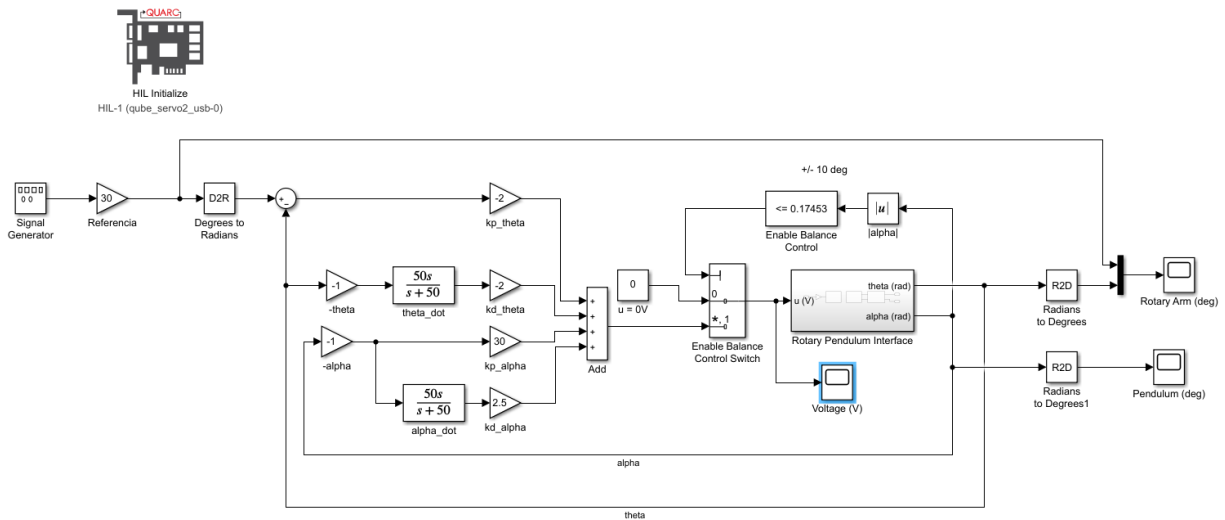


Figura 5: Diagrama realizado en simulink para el controlador PD para la planta real. Elaboración propia.

En los diagramas, se establece un switch de control para cuando el ángulo del péndulo se encuentre en el intervalo establecido. Ambos diagramas son exactamente iguales, sólo cambian las plantas y las librerías utilizadas para comunicar el sistema con Simulink, por lo que la posterior comparación será realizada en igualdad de condiciones.

4.9. Control LQR para el péndulo invertido rotatorio

En esta sección se utilizará otro tipo de controlador para estabilizar el péndulo en posición vertical hacia arriba, el controlador LQR (Linear Quadratic Regulator), el cuál permite encontrar un balance entre el esfuerzo de control y el estado del sistema mediante la siguiente ley de control:

$$u = -kx(t), \quad (36)$$

Donde K es la ganancia de realimentación de estados del sistema. Esta ley de control se aplica al sistema mediante el siguiente diagrama de bloques (Ver Figura 6):

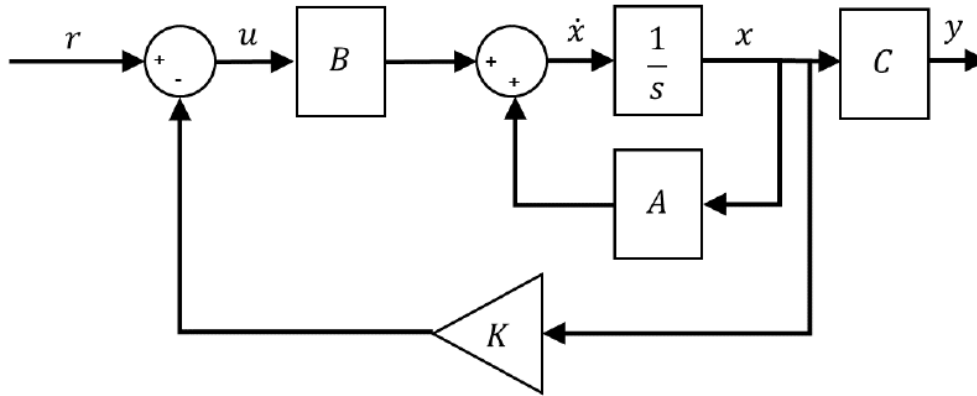


Figura 6: Diagrama de bloques para la ley de control LQR, Fuente: Quanser Manual LQR control Qube Servo 2.

Para este controlador, se requiere minimizar una función de costo cuadrática, que incorpora los estados ($x(t)$), la referencia deseada (x_{ref}), las entradas ($u(t)$) y las penalizaciones de entrada de control ($R(t)$) y de estados ($Q(t)$). Son estas dos últimas mencionadas las que permiten ajustar el desempeño del controlador, ya que al aumentar los valores de la matriz $Q(t)$, se prioriza el estado del sistema, es decir, que el ángulo del péndulo mantenga su posición a pesar de que se requiera mayor esfuerzo de control. Por otro lado, al aumentar los valores de la matriz $R(t)$, el esfuerzo de control será menor, lo que implica que se utiliza menor energía, pero también aumentará el tiempo de respuesta del sistema. Es de gran relevancia encontrar el equilibrio entre los valores entre estas dos matrices para garantizar un uso de energía eficiente y un tiempo de respuesta acotado. Sin embargo, este controlador permite llevar el estado del sistema a los extremos, como puede ser el uso de máxima energía para garantizar que el sistema vuelva o mantenga su posición de referencia rápidamente a pesar de las perturbaciones, o reducir el consumo energético, lo que aumenta el tiempo de respuesta del sistema. Para este sistema en particular, se buscará el equilibrio entre los valores de ambas matrices.

Para comenzar con la implementación, se define el vector de estados, donde se incorpora la posición del ángulo del brazo rotatorio, el ángulo del péndulo, velocidad angular del brazo y, respectivamente, la velocidad angular del péndulo:

$$\mathbf{x} = [\theta \quad \alpha \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}]^T, \quad (37)$$

También se define la señal de referencia del sistema, donde es posible controlar las variables anteriormente definidas, como es sabido, α debe ser 0 para que esté en su posición vertical hacia arriba:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_{ref} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (38)$$

Gracias a los manuales proporcionados por Quanser, se recomienda establecer valores preestablecidos para las matrices de penalización, los cuales mantienen un equilibrio entre estabilidad y uso energético. Sin embargo, es posible variar a conveniencia estos valores. Para efectos de este trabajo en específico, se utilizarán los valores recomendados por el fabricante, por lo que se definen los siguientes valores para las matrices:

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad (39)$$

Ahora, para encontrar la ganancia K del controlador, se utiliza el comando $\text{lqr}=(A,B,Q,R)$ en MatLab. Con esto realizado, el controlador está listo para ser implementado. A continuación, se muestra el respectivo diagrama de bloques. Desde ahora, sólo se mostrará el diagrama de bloques de la planta real, debido a que es exactamente el mismo que para la simulación (Ver Figura 7):

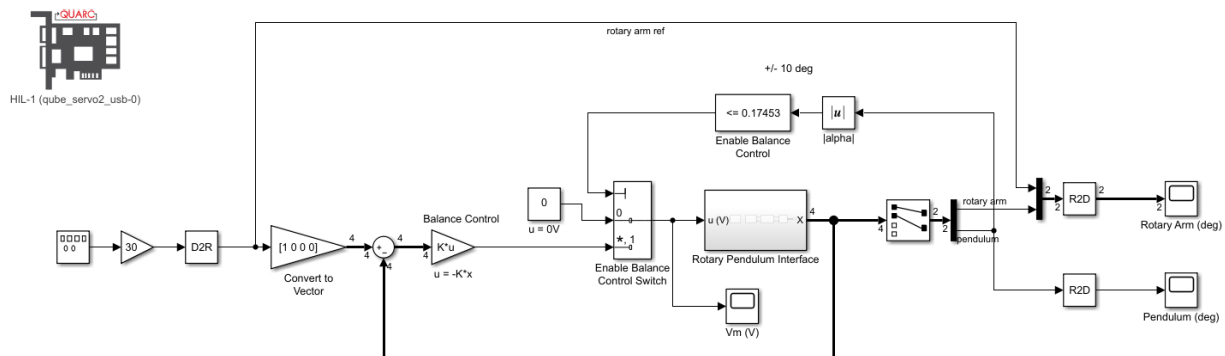


Figura 7: Diagrama realizado en simulink para el controlador LQR para la planta real. Elaboración propia

Tal como se realizó para el controlador PD, se realiza una activación para el controlador

una vez que el ángulo del péndulo se encuentre en el intervalo de $[-10^\circ, 10^\circ]$, esto al ser llevado de forma manual desde su posición colgante (180°). Se utiliza un generador de señales para dar una referencia para el ángulo del brazo rotatorio, el cuál varía en el intervalo $[-30^\circ, 30^\circ]$, y el péndulo sigue la referencia de 0° .

4.10. Control Adaptativo basado en modelo de referencia (MRAC) para el péndulo invertido rotatorio

Para la implementación del controlador adaptativo de orden entero para el sistema, se debe llevar la representación en espacio de estados del sistema a las correspondientes funciones de transferencia de las variables de interés, las cuales pueden obtenerse utilizando el código de MatLab señalado en el Anexo 8.7.

La función de transferencia del ángulo α con la entrada de voltaje $V(s)$ es:

$$\frac{\alpha(s)}{V(s)} = \frac{50,6372s^2 + 50,6896s + 2,0991 \times 10^4}{s^4 + 12,7606s^3 + 266,5555s^2 + 2,0369 \times 10^3s}, \quad (40)$$

La función de transferencia del ángulo θ con la entrada de voltaje $V(s)$ es:

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{50,0484s + 1,0137 \times 10^3}{s^3 + 12,7606s^2 + 266,5555s + 2,0369 \times 10^3}, \quad (41)$$

El grado relativo de ambas funciones es igual a 2, por lo que se debe aplicar una metodología específica de control adaptativo. Para este controlador, se requiere definir una función de transferencia para la especificación de las dinámicas deseadas del sistema. Además, se aplica la siguiente ley de control:

$$u(t) = \theta^T(t)\omega(t) - \text{sgn}(k_p)e_1(t)\bar{\omega}^T(t)\bar{\omega}(t), \quad (42)$$

Donde se representa la retroalimentación del sistema, las variables de estado y los parámetros ajustables (leyes de ajuste), las cuales tienen la siguiente forma:

$$\dot{k}(t) = -\text{sgn}(k_p)\gamma_1 e_1(t)r(t), \quad (43)$$

$$\dot{\theta}_0 = -\text{sgn}(k_p)\gamma_2 e_1(t)y_p(t), \quad (44)$$

$$\dot{\theta}_1 = -\text{sgn}(k_p)\gamma_3 e_1(t)\omega_1(t), \quad (45)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\text{sgn}(k_p)\gamma_4 e_1(t)\omega_2(t), \quad (46)$$

Donde $-\text{sgn}(k_p)$ representa la dirección de la corrección del controlador, los términos γ representan las ganancias en las leyes de ajuste. $e_1(t)$ representa el error entre la planta y la función de transferencia de referencia, finalmente $r(t)$ es la referencia deseada. Mediante pruebas experimentales, se concluyó que la siguiente función de transferencia de modelo de referencia lleva el sistema al punto deseado:

$$F_r(s) = \frac{50}{s^2 + 20s + 50}, \quad (47)$$

Y al implementar las leyes de ajuste y ley de control $u(t)$ en simulink, se obtiene el siguiente diagrama (Ver Figura 8):

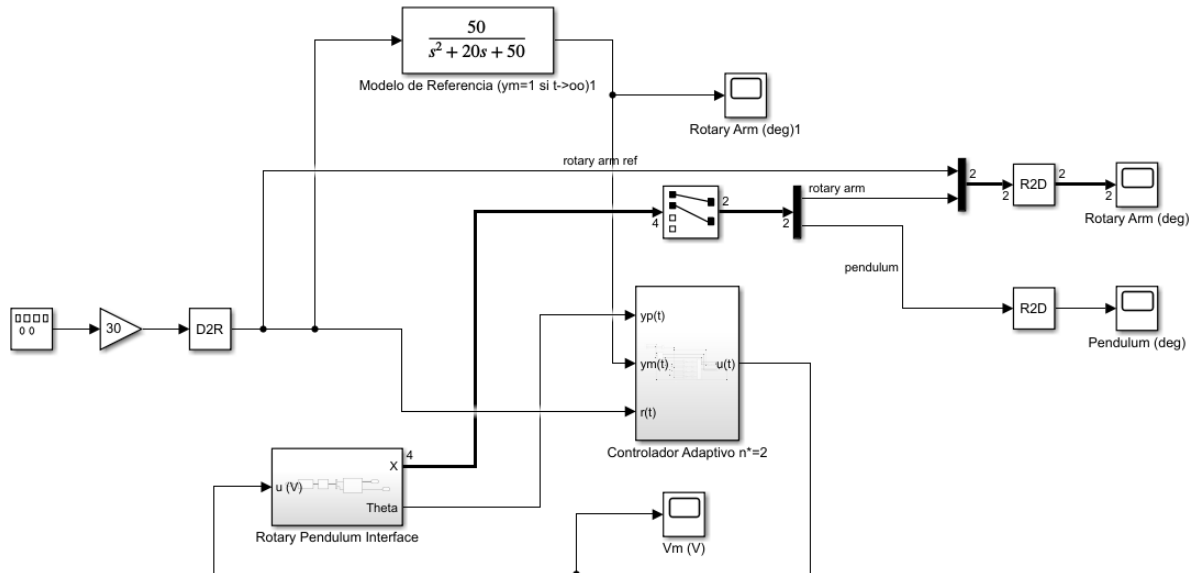


Figura 8: Diagrama realizado en Simulink de la implementación del controlador adaptativo de orden entero. Elaboración propia.

En esta implementación, el controlador seguirá la referencia para el brazo rotatorio mientras mantiene el péndulo en posición invertida. Los gráficos obtenidos se muestran en la sección de resultados y discusión.

4.11. Swing Up

Una de las aplicaciones que puede ser implementada en esta planta, es el algoritmo de Swing Up, que se utiliza para balancear el péndulo desde su posición de reposo hasta una posición elevada, donde se acciona el controlador cuando la posición del centro de masa entre al intervalo de valores establecidos para el rango para el rango del modelo linealizado. Esto se realiza debido a que el controlador no puede operar cuando el péndulo está muy lejos de la posición deseada. Para diseñar este algoritmo, se utiliza la energía del sistema, donde se incrementa gradualmente mediante la aplicación de voltaje al motor. Una vez el péndulo alcanza la posición vertical deseada, el sistema cambia al controlador diseñado para estabilizarlo. El procedimiento para obtener la ley de control que impulse el péndulo hasta alcanzar la posición deseada es el siguiente:

- Se describe cómo varía la posición del péndulo en el tiempo, el sistema se modela como un péndulo simple y se obtiene su ecuación característica:

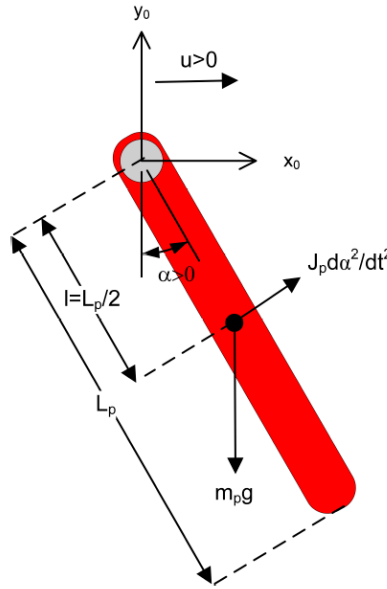


Figura 9: Representación del péndulo en estado de reposo, Fuente: Quanser (2021).

$$J_p \ddot{\alpha}(t) + m_p g l \sin \alpha(t) + m_p l u(t) \cos(\alpha(t)) = 0, \quad (48)$$

- Se realiza el análisis de energías involucradas en su dinámica, donde existe energía potencial y cinética. La energía potencial está dada por la posición del centro de masa del péndulo, por lo que es igual a $E_p = m_p g l (1 - \cos \alpha)$, por otro lado, la energía cinética asociada es igual a $E_k = \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2$, y la energía total del sistema es la suma de las ecuaciones anteriores. Al realizar una manipulación entre las ecuaciones anteriores (Modelo dinámico del péndulo y energías),

se obtiene la ecuación de la variación de energía con respecto al tiempo:

$$\dot{E} = -m_p l u \dot{\alpha} \cos(\alpha), \quad (49)$$

- Para encontrar la ley de control que dará impulso al péndulo hasta que alcance la energía deseada, se debe considerar que se requiere ajustar la entrada de forma proporcional a la diferencia entre la energía actual y de referencia, donde la entrada aumente si es que $E_t < E_r$ y disminuya en caso contrario. Además, se debe controlar la dirección y magnitud del torque aplicado, de modo que el controlador actúe de forma sincrónica con el movimiento del péndulo. Adicionalmente, se debe aplicar un valor proporcional que ajuste la intensidad del controlador, es decir, que aumente o disminuya la entrada. Este análisis se materializa en la siguiente ley de control para el Swing Up del péndulo:

$$u(t) = k_e(E_t - E_r) \text{sign}(\dot{\alpha} \cos(\alpha)) \quad (50)$$

Esta ley de control entrega la aceleración que requiere el péndulo para balancearse, debido a que la variable de control que se utiliza en el sistema es el voltaje, dentro de simulink se realiza la transformación $v_m(t) = \frac{R_m r m_r}{k_t} u(t)$, que proviene de las relaciones entre torque y voltaje.

Considerando lo anterior, el control híbrido del péndulo invertido rotatorio, consta del algoritmo de Swing Up para balancear el péndulo hasta que alcance la energía preestablecida y se conmute con el controlador utilizado. Lo que matemáticamente puede ser descrito como:

$$u = \begin{cases} u_{\text{bal}} & \text{if } |\alpha| - \pi \leq 0,345 \text{ rad}, \\ u_{\text{swing_up}} & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Donde u_{bal} representa que se acciona el controlador cuando el ángulo varía entre un intervalo de grados establecido, y $u_{\text{swing_up}}$ balancea el péndulo cuando no se cumple lo anterior. A continuación, se ilustra el diagrama realizado en simulink del swing up (Ver Figura 10):

El algoritmo de Swing Up se conmuta con el controlador cuando se alcanza cierto intervalo de valores. El bloque de control requiere las entradas del ángulo y velocidad angular, seguido de la ganancia proporcional (intensidad de entrada) y la energía de referencia, ambos valores pueden ser ajustados para aumentar la velocidad en la que se balancea el péndulo y la energía deseada. Además de lo anterior, también se incorpora un límite de aceleración, esto para proteger los componentes electrónicos de una sobrecarga de tensión.

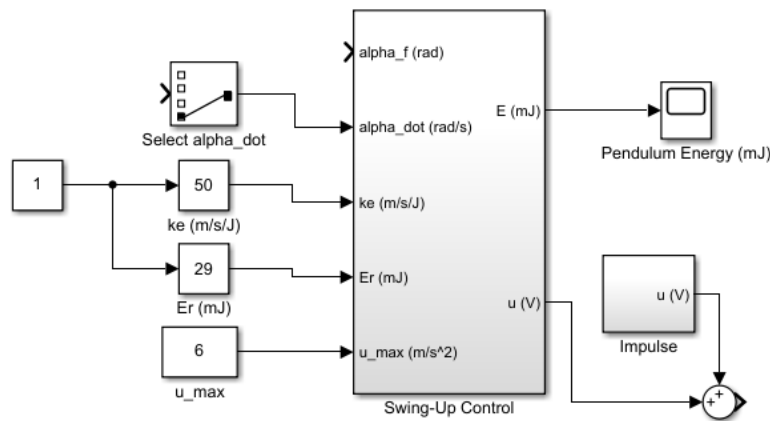


Figura 10: Diagrama en Simulink de la implementación de Swing Up. Elaboración propia.

4.12. Péndulo invertido rotatorio Qube Servo 2 de Quanser

Este trabajo se realizará comparando los distintos algoritmos de control señalados anteriormente en un péndulo invertido rotatorio físico, específicamente el modelo Qube servo 2 de Quanser, que se encuentra en el laboratorio de máquinas eléctricas y control de la Universidad de O'Higgins (Ver Figura 3). El sistema únicamente cuenta con su cable de alimentación y una conexión serial-USB para ser programado mediante MatLab y Simulink. Una vez conectada exitosamente la planta al computador, incluyendo la instalación de librerías, el sistema está listo para ser utilizado.



Figura 11: Péndulo invertido rotatorio Qube Servo 2 de Quanser.

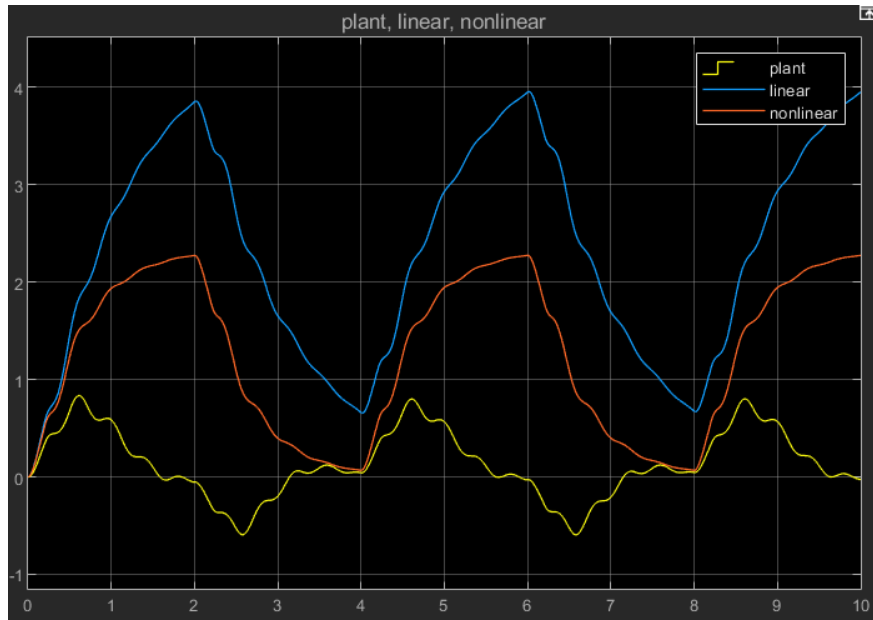


Figura 13: Gráfico de comparación del ángulo del brazo rotatorio θ en grados.

debido a la fricción. En la planta linealizada se descartan algunos términos que pueden alterar el resultado real. A pesar de que existe esta diferencia entre los modelos, la variación entre los ángulos es muy pequeña.

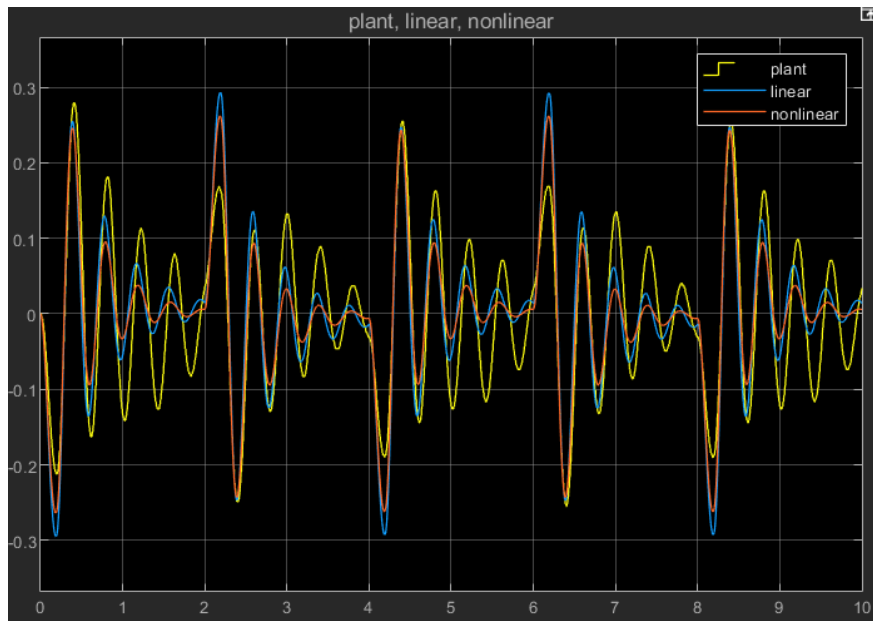


Figura 14: Gráfico de comparación del ángulo del brazo rotatorio α en grados.

Se aprecia que para cualquier instante de tiempo, el comportamiento de ambos modelos es muy similar, ambos responden frente a la perturbación y, posteriormente, tienden a volver a su posición de equilibrio sin variaciones significativas, del orden de 0.1° que, para efector prácticos, es

casi imperceptible, por lo que es posible afirmar que los modelos matemáticos describen de forma correcta el comportamiento del péndulo invertido rotatorio. Es importante destacar que los gráficos que se mostrarán en la sección de resultados y discusión serán, para todos los controladores (PD, LQR y Adaptativo), voltaje, ángulo del brazo rotatorio y ángulo del péndulo, además de algunas comparaciones aplicando el método de "swing up" para elevar el péndulo desde su posición de reposo hasta el intervalo de operación de los controladores.

5.2. Análisis de controladores

Para realizar el análisis de los gráficos obtenidos, se considerará la planta real con sus modelos de controladores y las simulaciones. Se mostrarán los gráficos de seguimiento de referencia, voltaje que se utiliza para mantener el péndulo en posición invertida y las oscilaciones que tiene mientras se encuentra en esta posición. Adicionalmente, se utilizará la comparación entre los errores de entrada y salida (ISE – ISI) para obtener un valor claro sobre la eficiencia de cada controlador. Las referencias establecidas para los ángulos del brazo rotatorio y del péndulo, son 0 respectivamente, es decir, el brazo debe mantenerse estable en dicho valor, y el péndulo debe mantenerse en posición invertida.

5.3. Controlador PD planta real

A continuación, se muestran los gráficos obtenidos mediante la aplicación del controlador a la planta real.

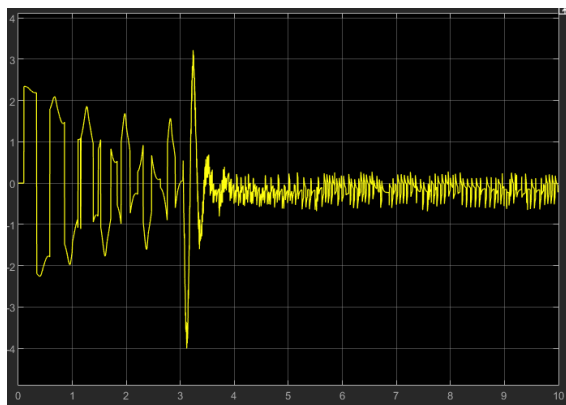


Figura 15: Voltaje aplicado al motor para balancear y estabilizar el péndulo.

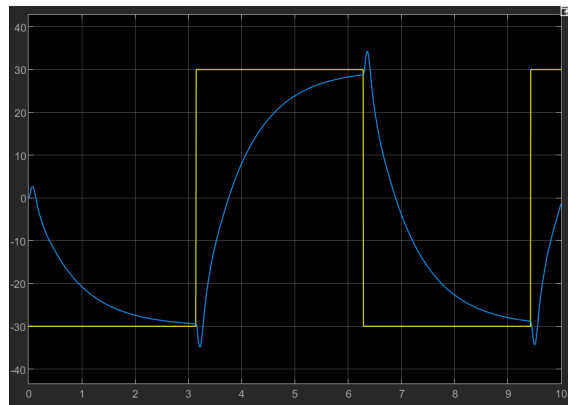


Figura 16: Ángulo del brazo rotatorio al balancear y estabilizar el péndulo.

A los 4.5 segundos aproximadamente de operación el algoritmo de swing up sede el estado del péndulo al controlador PD. Se aprecia que el peak de voltaje alcanza un valor de 6 Volts aproximadamente y, posteriormente, oscila constantemente entre $[-0.5V, 0.5V]$ para mantener el péndulo en posición invertida.

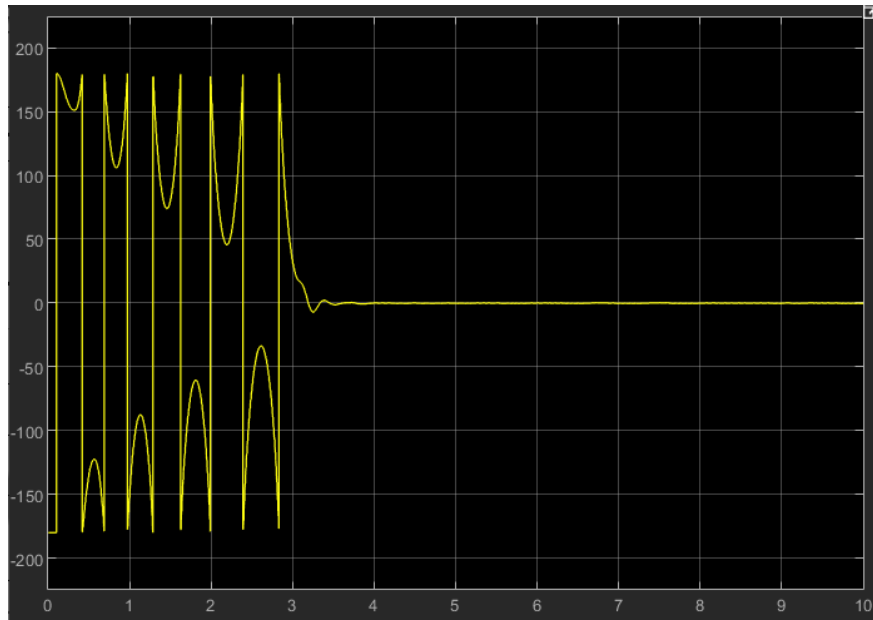


Figura 17: Ángulo del péndulo al ser balanceado y estabilizado en posición invertida.

5.4. Controlador LQR planta real

A continuación, se muestran los gráficos obtenidos mediante la aplicación del controlador a la planta real.

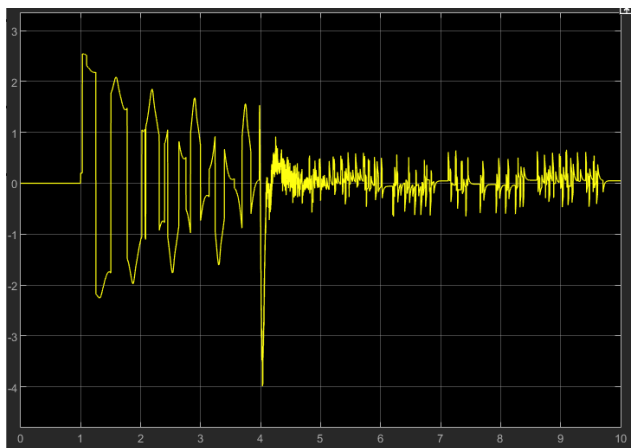


Figura 18: Voltaje aplicado al motor para balancear y estabilizar el péndulo.

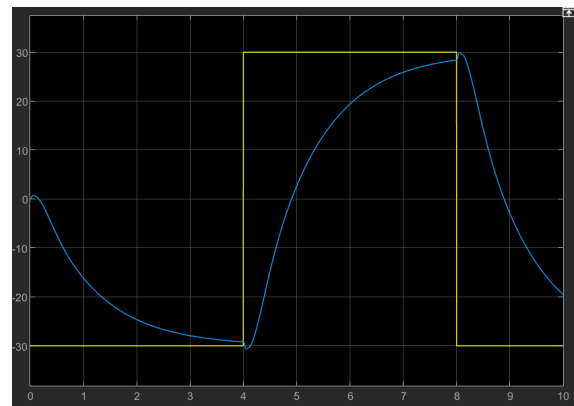


Figura 19: Ángulo del brazo rotatorio al balancear y estabilizar el péndulo.

A los 4.2 segundos aproximadamente de operación el algoritmo de swing up sede el estado del péndulo al controlador LQR. Se aprecia que el peak de voltaje alcanza un valor de 3.5 Volts aproximadamente y, posteriormente, oscila ocasionalmente entre $[-0.5V, 0.5V]$ para mantener el péndulo en posición invertida.

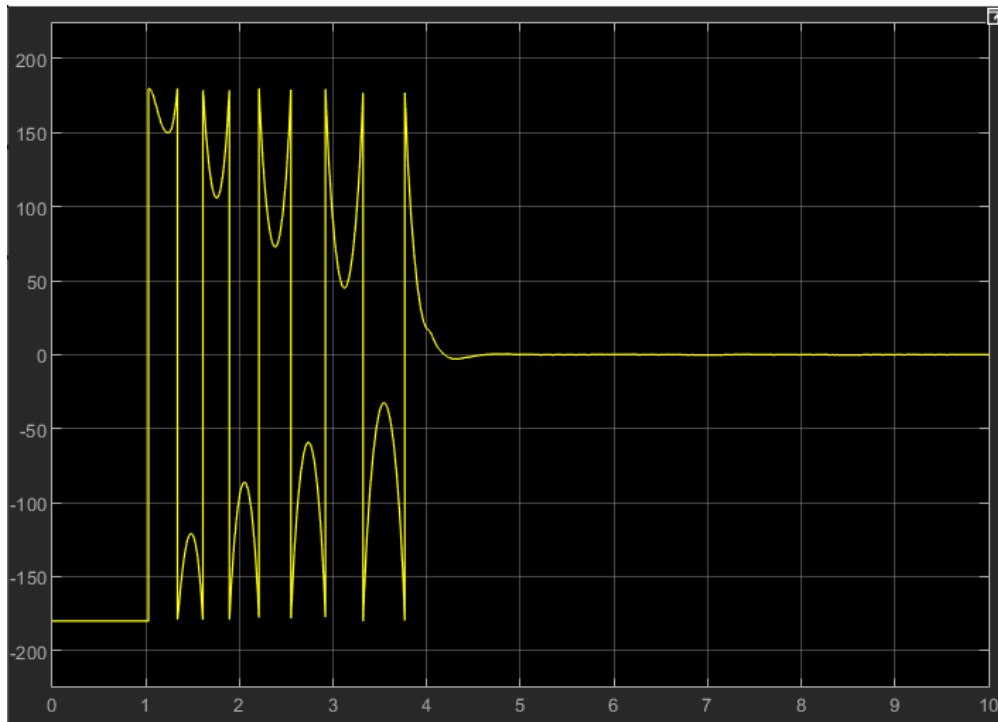


Figura 20: Ángulo del péndulo al ser balanceado y estabilizado en posición invertida.

5.5. Controlador Adaptativo simulado

Debido a la tardía disponibilidad de los equipos del laboratorio, el tiempo acotado brindado para la realización de este trabajo, además de la dificultad de implementación del controlador, el comportamiento del sistema bajo el control adaptativo, únicamente se realizó en la planta simulada. Donde se obtuvieron los siguientes gráficos de comportamiento al fijar un ángulo inicial de 6° :

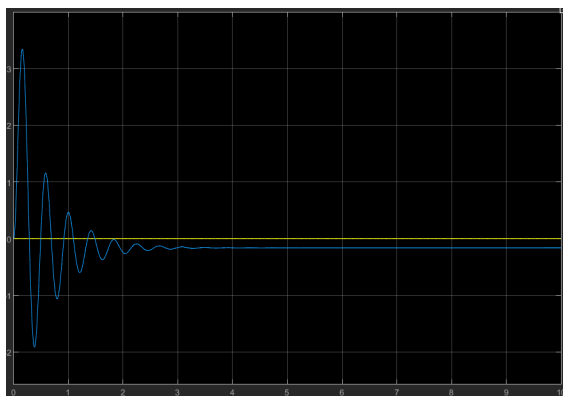


Figura 21: Ángulo del brazo rotatorio con controlador adaptativo simulado.

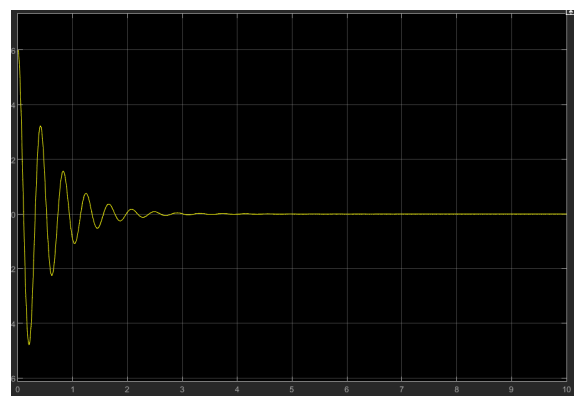


Figura 22: Ángulo péndulo con control adaptativo simulado.

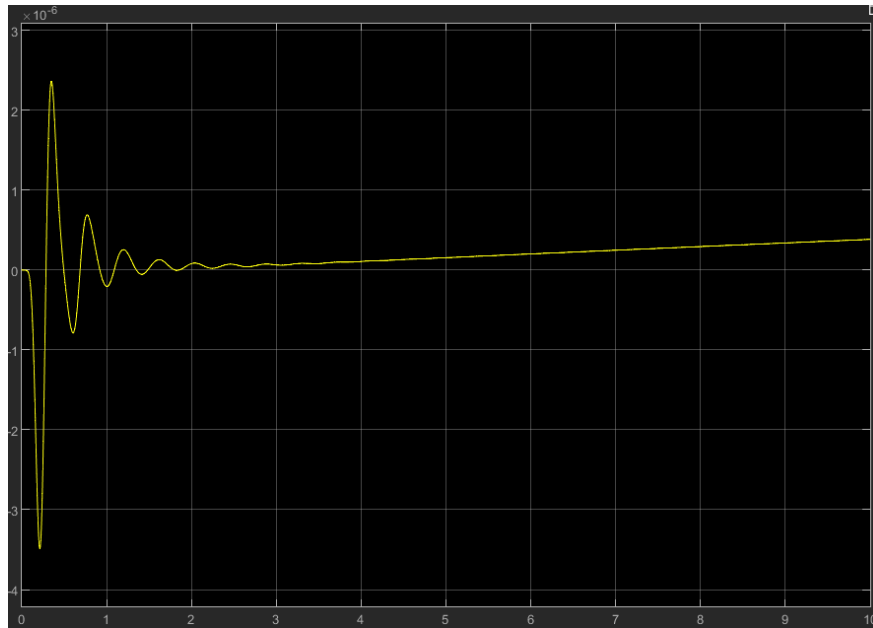


Figura 23: Voltaje requerido para estabilizar el péndulo en posición invertida al iniciar en un ángulo diferente de 0° al utilizar el controlador adaptativo.

Se aprecia que el controlador lleva el péndulo al estado invertido pasados dos segundos de simulación, el ángulo del brazo rotatorio tiende a 0 con el tiempo y el voltaje que se requiere para realizar la acción es del orden de 10^{-6} , por lo que prácticamente no se utiliza energía.

5.6. Simulación de seguimiento de referencia para el brazo rotatorio y desempeño de controladores

Se realizó una comparación entre la efectividad de los controladores mediante el seguimiento de una referencia cuadrada variable de 30° para el brazo rotatorio, donde se espera que el péndulo mantenga su posición invertida. A continuación, se muestran los gráficos de cada controlador:

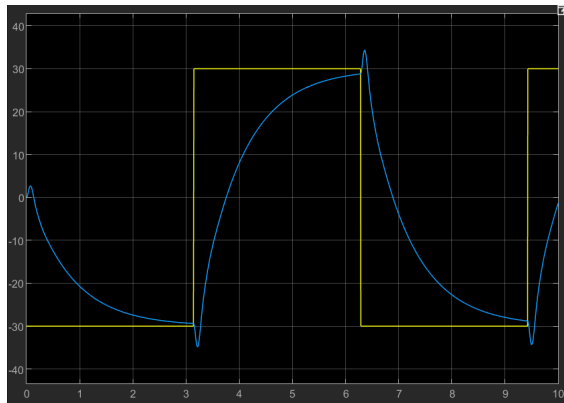


Figura 24: Ángulo del brazo rotatorio con controlador PD.

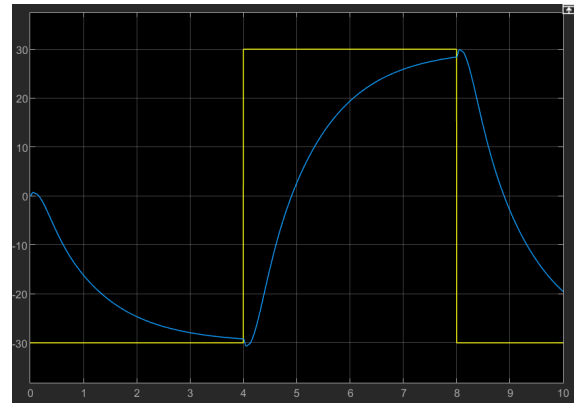


Figura 25: Ángulo del brazo rotatorio con controlador LQR.

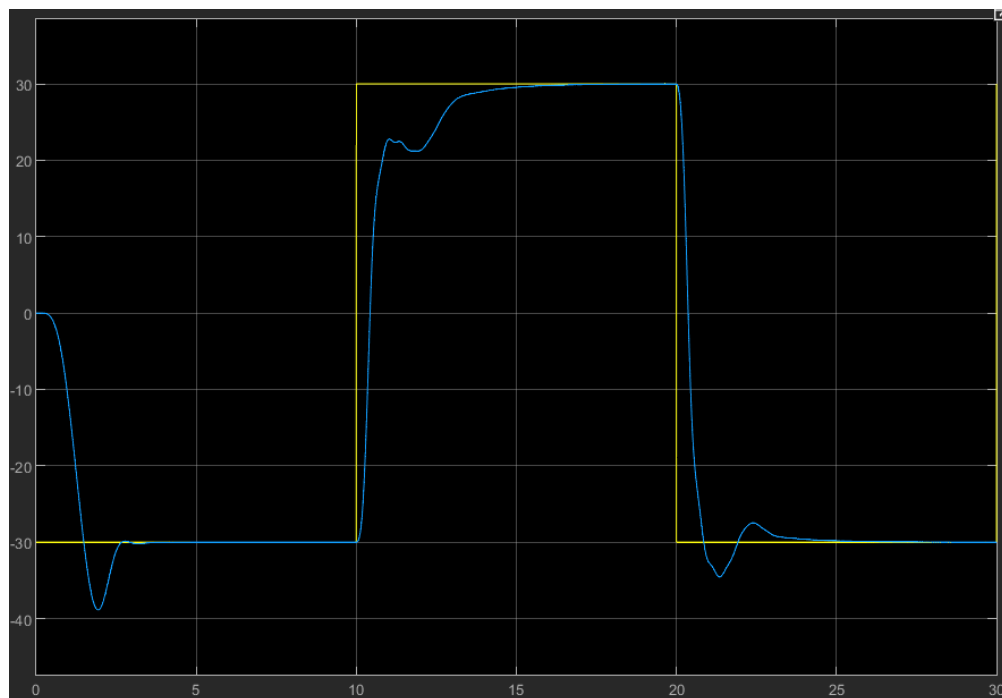


Figura 26: Ángulo del brazo rotatorio con controlador Adaptativo.

Se logra apreciar que los controladores PD y LQR siguen la referencia de forma similar, siendo muy parecidos. Con la aplicación del controlador adaptativo, es fácil notar que el seguimiento

de referencia es más efectivo.

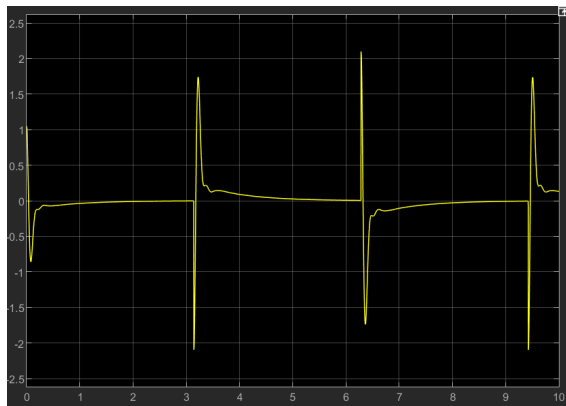


Figura 27: Voltaje utilizado con controlador PD.

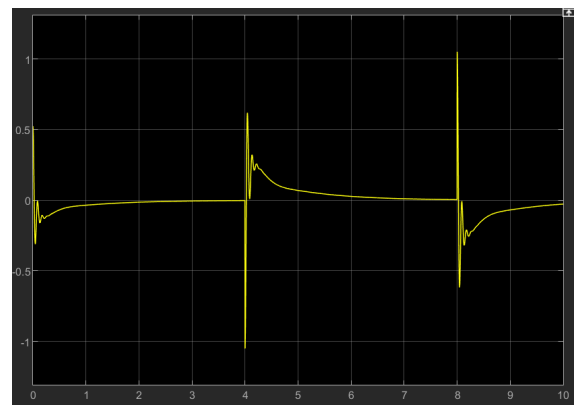


Figura 28: Voltaje utilizado con controlador LQR.

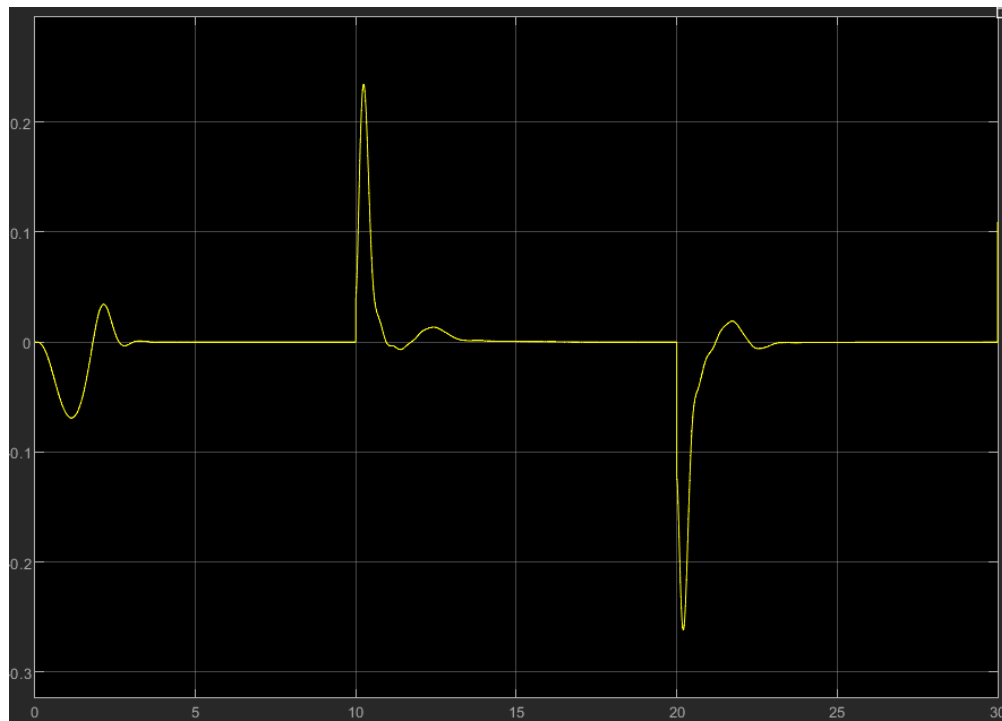


Figura 29: Voltaje utilizado con controlador Adaptativo.

Se logra apreciar que el voltaje necesario para seguir la referencia y mantener el péndulo en posición invertida es menor en el controlador adaptativo al alcanzar un peak máximo de 0.22V aproximadamente, seguido del controlador LQR con un peak de 1V y, finalmente, el controlador PD con un peak de 2.1V aproximadamente. En términos de entrada de control (Voltaje), el controlador adaptativo resulta más eficiente.

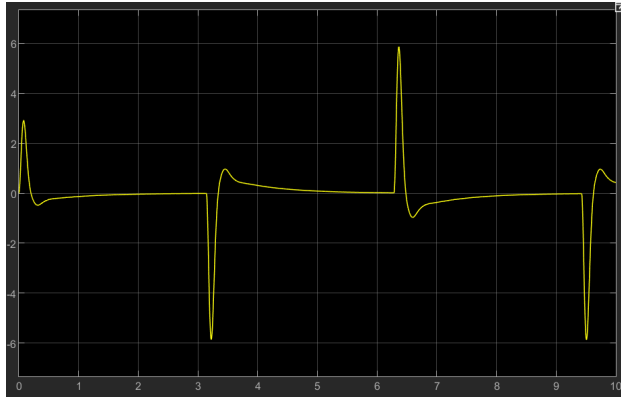


Figura 30: Ángulo del péndulo con controlador PD.

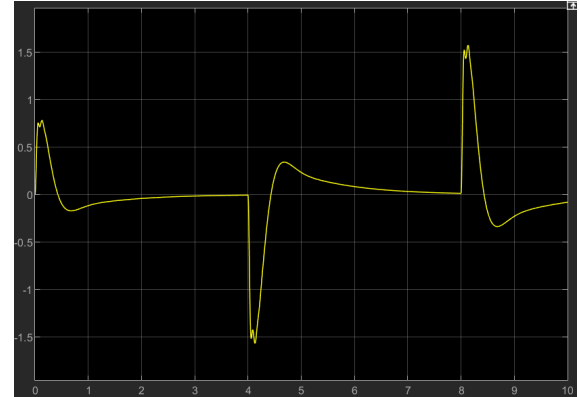


Figura 31: Ángulo del péndulo con controlador LQR.



Figura 32: Ángulo del péndulo con controlador Adaptativo.

El controlador PD tiene variación entre el intervalo $[-6^\circ, 6^\circ]$, el controlador LQR varía entre $[-1.5^\circ, 1.5^\circ]$ y, finalmente, el controlador adaptativo varía entre $[-8^\circ, 8^\circ]$. En términos de mantener la estabilidad del péndulo, el controlador LQR mantiene valores más acotados de oscilación, seguido del controlador PD y adaptativo. Sin embargo, los tres controladores devuelven el péndulo al punto de operación de interés.

Mediante el Integral Square of Error (ISE) y el Integral of Square Input (ISI) es posible evaluar el desempeño del sistema sometido a distintos controladores. Gracias al ISE, es posible analizar el error acumulado a lo largo del tiempo, esta técnica penaliza fuertemente los errores, debido al

término cuadrático, lo que, al obtener un valor de ISE bajo, indica que el controlador obtiene un mejor desempeño en términos de la minimización del error. Por otro lado, el ISI, de forma análoga al ISE, penaliza las entradas grandes de control del sistema. Un valor de ISI bajo, indica que el controlador es eficiente energéticamente, en otras palabras, se utiliza para evaluar cuánta energía requiere el sistema para estabilizar el péndulo. Adicionalmente, se utiliza la función de desempeño J que, por simplificación, será la suma de del ISI e ISE, este valor de J indica la precisión y eficiencia energética de cada controlador, donde un menor valor de esta función representa menor consumo energético y menor estabilidad. Se obtuvieron los valores indicados en el Cuadro 4.

Controlador	ISE	ISI	J
PD	0.002659 $rad^2 \cdot s$	0.8789 $rad \cdot s$	0.881559
LQR	0.0003646 $rad^2 \cdot s$	0.1281 $rad \cdot s$	0.1284646
Adaptativo	0.0001558 $rad^2 \cdot s$	0.03815 $rad \cdot s$	0.0383058

Cuadro 4: Comparación de controladores en términos de ISE, ISI y J.

Adicionalmente, se muestra un cuadro resumen con los valores más relevantes obtenidos por los gráficos (Ver Cuadro 5):

Controlador	Voltaje máximo	Voltaje promedio	Variaciones de α en grados
PD	2.1 V	0.2 V	$[-6^\circ, 6^\circ]$
LQR	1 V	0.2 V	$[-1.5^\circ, 1.5]$
Adaptativo (simulado)	0.22 V	0.01 V	$[-8^\circ, 8^\circ]$

Cuadro 5: Comparación de voltajes y variaciones de α para diferentes controladores.

6. Conclusiones

Al considerar las comparaciones entre los diferentes controladores, en la planta real de Quanser, el Qube servo 2, los controladores LQR y PD cumplen con el objetivo general de estabilizar el péndulo invertido rotatorio en su posición vertical hacia arriba, con posibilidad de mantener estabilidad al seguir una referencia para el ángulo del motor. Si bien ambos controladores son efectivos para lo anterior, el modelo LQR logra un mejor desempeño en la gestión de la entrada de control (voltaje), evitando oscilaciones excesivas y manteniendo un intervalo de ángulos menor que el controlador PD. Adicionalmente, fue posible implementar el algoritmo de swing up para estos algoritmos, que complementa de forma efectiva el control de la planta, ya que se logra elevar y estabilizar el centro de masa del péndulo sin requerir de intervenciones manuales.

Para la comparación de los escenarios simulados, fue posible realizar la implementación del controlador adaptativo de orden entero para la planta. Se planteó la situación del seguimiento de una referencia para el ángulo del brazo rotatorio, donde se debía mantener la estabilidad del péndulo en su posición invertida. Los tres controladores se comportaron de la forma esperada, realizando el seguimiento de la referencia. Se realizó la comparación en términos de voltaje requerido, ángulo del péndulo y ángulo del brazo rotatorio. Se concluye que el controlador adaptativo requiere menos voltaje para mantener el péndulo en posición invertida, además de que el seguimiento de la referencia es claramente superior a los demás controladores, sin embargo las oscilaciones del péndulo son ligeramente mayores. El controlador LQR se encuentra en posición intermedia en términos de las comparaciones realizadas, encontrando un equilibrio entre voltaje, seguimiento de referencia y oscilaciones del péndulo. Lo anterior se visualiza de mejor manera considerando la Tabla 3 de comparaciones de desempeño. Sin embargo, también se considera la dificultad de la implementación de los controladores, siendo el control PD el más sencillo, seguido del LQR y, finalmente, el adaptativo. Es debido a lo anterior que la hipótesis planteada sobre la eficiencia del controlador adaptativo sobre LQR y PD fue comprobada.

Adicionalmente, se logró emplear efectivamente el método de Euler-Lagrange para realizar el análisis dinámico del sistema, que es una nueva herramienta adquirida gracias a este trabajo. Por último, el sistema del péndulo invertido rotatorio de Quanser, ubicado en el laboratorio de máquinas eléctricas y control de la Universidad de O'Higgins, quedó completamente funcional para ser utilizada en el estudio de al menos dos técnicas de control comúnmente utilizadas, PD y LQR. En adición con el sistema simulado con la aplicación del controlador adaptativo. La planta permite la aplicación de distintos métodos de control debido a su programación en Simulink, donde al manipular los bloques correspondientes en la metodología de control, es posible implementar éste análisis de eficiencias utilizando otro tipo de controladores.

Finalmente, esta memoria puede ser utilizada como guía de aplicación práctica para los estudiantes que deseen estudiar las técnicas de control mencionadas a lo largo del documento en el péndulo invertido rotatorio de Quanser, lo que significará un acercamiento a la realidad del uso de la teoría de control en la práctica, ya que se aplican los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera en un sistema relativamente sencillo.

7. Referencias

- Acosta, R., Téllez, J. D., Hernández, G. A. M., & Castellanos, J. F. G. (2023). Modelado y control óptimo de la estabilidad de un robot móvil de dos ruedas utilizando técnicas PID y LQR. *Avances Investigación En Ingeniería*, 20(2 (Julio-Diciembre)). <https://doi.org/10.18041/1794-4953/avances.2.10918>
- Furuta, K. (2003). Control of pendulum: from Super Mechano-System to Human Adaptive Mechatronics. *IEEE Conference on Control Applications, CCA 2003. Proceedings of the 2003*, pp. 7-14. Available: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1272824>
- González, J., Lusson, A. y Bausa, I. (2016). Alternativas de control para un Péndulo de Furuta. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 13, 410-420. <https://dspace.ups.edu.ec/handle/123456789/15889>
- Marcos, O. C., Manuel, D. M., Néstor, B. Y., Ricardo, P. C., & Héctor, R. E. (2023). Mejoramiento del desempeño del control longitudinal de una aeronave mediante la incorporación de controladores adaptivos de orden fraccionario. Recuperado de <https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/199656>
- Ogata, K. (2010b). *Ingeniería de control moderna* 5 ed. PRENTICE HALL.
- Palacio, S. (2015). Diseño de un sistema de control para un módulo de un péndulo invertido de rotación. [Proyecto de grado, Universidad Tecnológica de Pereira. Available: <https://dspace.ups.edu.ec/handle/123456789/15889>
- Rodríguez, J. A. P., Briceño, L. R. D., Albuerne, Y. L., Borges, C. G. R., & Álava, L. A. C. (2021). Aspectos Prácticos del Control PID en Procesos Industriales. Dialnet. Available: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8229745>
- Salazar, E. (2018). Estudio comparativo del desempeño de tres tipos de controladores para el péndulo invertido furuta. [Tesis de pregrado, Universidad Politécnica Salesiana]. Available: <https://dspace.ups.edu.ec/handle/123456789/15889>
- Vilanova, R., & Alfaro, V. M. (2011). Control PID robusto: Una visión panorámica. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 8(3), pp. 141-158. Available: <https://doi.org/10.1016/j.riai.2011.06.003>
- Arnold, V. I. (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. En *Graduate texts in mathematics*. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2063-1>
- Vázquez, T. R. (2004). *Análisis básico de circuitos eléctricos y electrónicos*. PRENTICE HALL.
- Chapman, S. J. (2012). *Máquinas eléctricas*. MCGRAW HILL.

- Josephs, H., & Huston, R. (2002). Dynamics of Mechanical Systems. CRC Press.

8. Anexos

8.1. Velocidad de traslación del centro de masa del péndulo

Al utilizar las coordenadas cartesianas, se deriva con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{d}{dt} [r \cos \theta + l \sin \alpha \cos \theta] \\ &= -r \sin \theta \dot{\theta} + l \cos \alpha \dot{\alpha} \cos \theta - l \sin \alpha \sin \theta \dot{\theta}, \\ \dot{y} &= \frac{d}{dt} [r \sin \theta + l \sin \alpha \sin \theta] \\ &= r \cos \theta \dot{\theta} + l \cos \alpha \dot{\alpha} \sin \theta + l \sin \alpha \cos \theta \dot{\theta}, \\ \dot{z} &= \frac{d}{dt} [l \cos \alpha] \\ &= -l \sin \alpha \dot{\alpha}.\end{aligned}$$

Se reemplaza en $v_{cm}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$:

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 &= \left(-r \sin \theta \dot{\theta} + l \cos \alpha \dot{\alpha} \cos \theta - l \sin \alpha \sin \theta \dot{\theta} \right)^2, \\ \dot{y}^2 &= \left(r \cos \theta \dot{\theta} + l \cos \alpha \dot{\alpha} \sin \theta + l \sin \alpha \cos \theta \dot{\theta} \right)^2, \\ \dot{z}^2 &= (-l \sin \alpha \dot{\alpha})^2 = l^2 \sin^2 \alpha \dot{\alpha}^2.\end{aligned}$$

Al expandir:

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 &= r^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + l^2 \cos^2 \alpha \dot{\alpha}^2 \cos^2 \theta + l^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 - 2rl \cos \alpha \sin \theta \dot{\theta} \dot{\alpha} \cos \theta, \\ \dot{y}^2 &= r^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + l^2 \cos^2 \alpha \dot{\alpha}^2 \sin^2 \theta + l^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2rl \cos \alpha \cos \theta \dot{\theta} \dot{\alpha} \sin \theta, \\ \dot{z}^2 &= l^2 \sin^2 \alpha \dot{\alpha}^2.\end{aligned}$$

Al sumar y agrupar:

$$\begin{aligned}v_{cm}^2 &= r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \dot{\theta}^2 + l^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \dot{\alpha}^2 + 2rl \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha} \\ &\quad + l^2 \sin \alpha \cos \alpha \dot{\theta}^2.\end{aligned}$$

Al simplificar con la identidad trigonométrica $\sin^2 + \cos^2 = 1$:

$$v_{cm}^2 = r^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\alpha}^2 + 2rl \cos \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha}, \quad (51)$$

8.2. Análisis del motor DC

- Análisis eléctrico: El circuito equivalente del motor incluye una resistencia R_m , una inductancia L_m , y una fuerza contraelectromotriz proporcional a la velocidad angular del motor, por lo que, aplicando las leyes de Kirchhoff, la ecuación del circuito es:

$$v_m(t) = L_m \frac{di_m(t)}{dt} + R_m i_m(t) + k_m \dot{\theta}_m(t), \quad (52)$$

Asumiendo que la inductancia L_m es pequeña, se puede despreciar el término correspondiente. Entonces, la ecuación se simplifica a:

$$v_m(t) - R_m i_m(t) - k_m \dot{\theta}_m(t) = 0, \quad (53)$$

Despejando la corriente del motor:

$$i_m(t) = \frac{v_m(t) - k_m \dot{\theta}_m(t)}{R_m}, \quad (54)$$

- Análisis mecánico: El torque generado por el motor es proporcional a la corriente que circula por el mismo, y está dado por:

$$\tau_m(t) = k_t i_m(t), \quad (55)$$

Sustituyendo la corriente obtenida anteriormente:

$$\tau_m(t) = k_t \frac{v_m(t) - k_m \dot{\theta}_m(t)}{R_m}, \quad (56)$$

- Análisis rotacional: La dinámica rotacional del sistema está descrita por la ecuación de movimiento de Newton aplicada a un sistema rotacional:

$$J_{eq} \ddot{\theta}_m(t) = \tau_m(t) - b_m \dot{\theta}_m(t) \quad (57)$$

Sustituyendo el torque $\tau_m(t)$ en la ecuación mecánica:

$$J_{eq}\ddot{\theta}_m(t) = k_t \frac{v_m(t) - k_m\dot{\theta}_m(t)}{R_m} - b_m\dot{\theta}_m(t) \quad (58)$$

8.3. Linealización de términos

- $J_p \sin^2(\alpha)$ se convierte en $J_p \alpha^2$, que es despreciable para ángulos pequeños, por lo tanto, se puede despreciar.
- $m_p l_r \cos(\alpha) \ddot{\alpha}$ se aproxima a $m_p l_r \ddot{\alpha}$, ya que $\cos(\alpha) \approx 1$.
- $2J_p \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha}$ se convierte en $2J_p \alpha \dot{\theta} \dot{\alpha}$. Para pequeñas oscilaciones, este término es muy pequeño y también se puede despreciar.
- $m_p l_r \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2$ se convierte en $m_p l_r \alpha \dot{\alpha}^2$, el cual es pequeño y se puede eliminar.
- $m_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\theta}$ se convierte en $m_p L_r \ddot{\theta}$, ya que $\cos(\alpha) \approx 1$.
- $J_p \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta}^2$ se convierte en $J_p \alpha \dot{\theta}^2$, que se puede despreciar para pequeñas oscilaciones.
- $m_p g L_p \sin(\alpha)$ se convierte en $m_p g L_p \alpha$.

8.4. Cálculos para obtener la representación en espacio de estado

Se despeja $\ddot{\alpha}$ de la ecuación (7):

$$J_p \ddot{\alpha} = -m_p l_r \ddot{\theta} - m_p g l \alpha - b_p \dot{\alpha}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{-m_p l_r \ddot{\theta} - m_p g l \alpha - b_p \dot{\alpha}}{J_p} \quad (59)$$

Se sustituye en la ecuación (6):

$$J_r \ddot{\theta} + m_p l_r \left(\frac{-m_p l_r \ddot{\theta} - m_p g l \alpha - b_p \dot{\alpha}}{J_p} \right) = \tau - b_r \dot{\theta}$$

$$J_r \ddot{\theta} - \frac{m_p^2 l_r^2 \ddot{\theta}}{J_p} - \frac{m_p^2 l_r^2 g \alpha}{J_p} - \frac{m_p l_r b_p \dot{\alpha}}{J_p} = \tau - b_r \dot{\theta}$$

$$\left(J_r - \frac{m_p^2 l_r^2}{J_p} \right) \ddot{\theta} = \tau - b_r \dot{\theta} + \frac{m_p^2 l_r^2 g \alpha}{J_p} + \frac{m_p l_r b_p \dot{\alpha}}{J_p}$$

Para simplificar los cálculos, se define $J_t = J_p J_r - m_p^2 l^2 r^2$:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_t} \left(\tau - b_r \dot{\theta} + \frac{m_p^2 l_r^2 g \alpha}{J_p} + \frac{m_p l_r b_p \dot{\alpha}}{J_p} \right)$$

Finalmente, al despejar $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J_t} \left(m_p^2 l^2 r g \alpha - J_p b_r \dot{\theta} + m_p l r b_p \dot{\alpha} + J_p \tau \right) \quad (60)$$

Ahora para $\ddot{\alpha}$:

$$\ddot{\alpha} = \frac{-m_p l_r \ddot{\theta} - m_p g l \alpha - b_p \dot{\alpha}}{J_p}$$

Sustituyendo $\ddot{\theta}$ se obtiene la expresión final para $\ddot{\alpha}$:

$$\ddot{\alpha} = \frac{-m_p l_r}{J_p} \left(\frac{1}{J_t} \left(m_p^2 l^2 r g \alpha - J_p b_r \dot{\theta} + m_p l r b_p \dot{\alpha} + J_p \tau \right) \right) - \frac{m_p g l \alpha + b_p \dot{\alpha}}{J_p}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{-m_p l_r}{J_p J_t} \left(m_p^2 l^2 r g \alpha - J_p b_r \dot{\theta} + m_p l r b_p \dot{\alpha} + J_p \tau \right) - \frac{m_p g l \alpha + b_p \dot{\alpha}}{J_p}$$

Finalmente, se obtiene:

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{J_t} \left(-m_p g l J_r \alpha + m_p l r b_r \dot{\theta} - J_p b_p \dot{\alpha} - m_p r l \tau \right) \quad (61)$$

8.5. Código de MatLab de la representación de estados del sistema lineal

```
1      % Inercia total
2 -    Jt = Jr*Jp - mp^2*r^2*l^2;
3      %
4      % Representación en espacio de estados
5 -    A = [0 0 1 0;
6          0 0 0 1;
7          0 mp^2*l^2*r*g/Jt -br*Jp/Jt mp*l*r*bp/Jt
8          0 -mp*g*l*Jr/Jt mp*l*r*br/Jt -Jp*bp/Jt];
9      %
10 -   B = [0; 0; Jp/Jt; mp*l*r/Jt];
11 -   C = eye(4,4);
12 -   D = zeros(4,1);
13      %
14      % Cambio en la dinámica del actuador
15 -   A(3,3) = A(3,3) - km*km/Rm*B(3);
16 -   A(4,3) = A(4,3) - km*km/Rm*B(4);
17 -   B = km * B / Rm;
```

Figura 33: Código de MatLab para la representación en espacio de estados del sistema linealizado.

8.6. Código en MatLab para encontrar los valores PD

```
C_asiso_a = [0 1 0 0]; % Se selecciona la segunda variable (alpha)
D_asiso_a = 0;
sys_asiso = ss(A, B, C_asiso_a, D_asiso_a);

C_pd_a = pidtune(sys_asiso, 'PD');

C_asiso_t = [1 0 0 0]; % Se selecciona la primera variable (theta)
D_asiso_t = 0;
sys_asiso = ss(A, B, C_asiso_t, D_asiso_t);

C_pd_t = pidtune(sys_asiso, 'PD');
```

Figura 34: Código en MatLab para encontrar los parámetros PD para la planta

Para lograr encontrar los parámetros PD, primero se requiere transformar el sistema SIMO (Single Input Multiple Output) en un sistema SISO (Single Input Single Output) y luego aplicar el comando "pidtune" para cada salida del sistema. Con esto, se encuentran las ganancias correspondientes para el controlador PD.