MODELOS Y ALGORITMOS PARA EL PROBLEMA DE DETERMINACIÓN DE PRECIOS PARA CLIENTES CON COMPORTAMIENTO SINGLE - MINDED EN PRESENCIA DE INVENTARIO

TOMÁS FRANCISCO MENESES VENEGAS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA,
MENCIÓN GESTIÓN DE OPERACIONES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍA:
VÍCTOR BUCAREY
PROFESORA CO-GUÍA:
DANA PIZARRO

UNIVERSIDAD DE O'HIGGINS
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
ESCUELA DE INGENIERÍA
MAGISTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

RANCAGUA, CHILE
ABRIL, 2024

Resumen

Este trabajo se focaliza en el estudio de un problema importante y complejo que enfrentan las empresas al determinar el precio de sus productos con el objetivo principal de maximizar sus ingresos. Se aborda el problema de determinación de precios para clientes con comportamiento *single-minded* en presencia de inventario, desarrollando estrategias tanto para el caso *Offline* como para el *Online*.

Para el caso *Offline*, se estudiarán políticas de precio único, en los que todos los productos tienen el mismo precio, y políticas de precio fijo en los que dos productos diferentes pueden diferir en su precio.

Para el caso *Online*, se estudiarán dos enfoques: precios no adaptativos y adaptativos. Para los precios no adaptativos, se estudiarán políticas de precio único y fijo. En este enfoque los precios se mantienen constantes pero varía el orden en el que llegan los clientes. En lo que concierne a los precios adaptativos, se analizarán políticas de precios únicos y fijos, pero con la particularidad de que los precios se ajustan conforme llegan los clientes.

Cada caso concluye con un estudio computacional, evaluando y comparando la eficiencia en cuanto a los ingresos y rapidez en cuanto a tiempos de ejecución de cada modelo y algoritmo implementado.

Agradecimientos

Quiero comenzar expresando mi profundo agradecimiento a mi familia. A Francisco, mi padre, a Edith, mi madre, y a mis queridas hermanas Damaris y Jocelyn. Su apoyo incondicional ha sido fundamental en este desafiante proceso. A Lucas, mi sobrino, le agradezco por llenar mis días de alegría y darme la fuerza necesaria para seguir adelante. También quiero mencionar a mi sobrino que viene en camino, mi querido Santiago, cuya llegada la espero con ilusión y amor.

A mis amigos Enzo, Lía, Victor, Consuelo, Diego, Sayli, Sebastián, Carolina, Adolfo y Katherine, les agradezco por el apoyo mutuo, las risas compartidas, por estar siempre en los buenos momentos y malos momentos y por sobre todo la gran amistad que hemos forjado a lo largo de los años. También quiero reconocer a mis compañeros de fútbol y futsal, Edgardo, Dylan, Rodrigo y Yunel, con quienes he cultivado una gran amistad gracias al deporte que tanto amamos. Y a mi gran amigo de vida Joaquín, gracias por tu constante presencia, por escucharme y por ser un apoyo incondicional en mi vida.

Agradezco de corazón a mis profesores Víctor Bucarey y Dana Pizarro por confiar en mí, por su apoyo y orientación durante todo el proceso de esta tesis.

Extiendo mi gratitud a cada persona que ha formado parte de mi experiencia universitaria, a todos aquellos con quienes he compartido momentos significativos. Su contribución ha sido invaluable y les estoy profundamente agradecido. Además, quiero extender mi agradecimiento a todas aquellas personas que, en algún momento de mi vida, formaron parte de mi camino y contribuyeron a mi crecimiento y desarrollo personal.

¡Muchas gracias a todos por su inestimable apoyo y compañía a lo largo de este viaje!

Tabla de Contenido

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Capítulo 1

Introducción

La fijación de precios es una tarea crucial y compleja para las empresas. Determinar el precio correcto es fundamental para alcanzar el objetivo, que generalmente consiste en maximizar los ingresos. Además, una estrategia de fijación de precios efectiva puede cultivar clientes satisfechos y leales, generando ingresos constantes a lo largo del tiempo y contribuyendo así a una rentabilidad sostenida. Este proceso requiere tomar decisiones estratégicas para asignar óptimamente el precio a los productos, teniendo en cuenta diversos factores como los costos de producción, la demanda del mercado, la competencia y la percepción de los clientes sobre los productos, entre otros aspectos relevantes.

La venta de productos implica la interacción entre dos partes: el vendedor, representado en este caso por la empresa, y el comprador, que son los clientes. Mientras el vendedor dispone de una gama de artículos para ofrecer, los compradores realizarán sus compras si los precios propuestos son considerados aceptables. El objetivo principal de establecer precios es alcanzar un equilibrio entre maximizar las ganancias y mantener una demanda sólida; fijar precios excesivamente altos puede ahuyentar a los clientes, mientras que precios demasiado bajos pueden generar una alta demanda pero reducir las ganancias [8]. El proceso puede volverse aún más desafiante debido a la constante dinámica del mercado y la evolución de las preferencias de los clientes, así como otros factores que influyen en la oferta y la demanda [8].

Para abordar estos desafíos, las empresas pueden recurrir a diversas estrategias de fijación de precios, como el enfoque basado en costos, el precio basado en el valor percibido, la fijación de precios dinámicos, la fijación de precios psicológicos y otros métodos específicos adaptados a la industria y al mercado objetivo [9].

1.1. Problema de Investigación

Se inicia definiendo el problema de determinación de precios para clientes con comportamiento ***single-minded*** en presencia de inventario (PDPSMI), que se abordará a lo largo de este trabajo.

Una empresa desea vender un conjunto M de productos diferentes a un conjunto N de clientes. Se asumirá que cada producto $i \in M$ tendrá un inventario $m_i \geq 0$. Cada cliente $j \in N$ desea comprar un subconjunto de productos (paquete) $S^j \subseteq M$, para lo cual tiene un presupuesto asignado $b^j > 0$. En este contexto, S^j_i representa la demanda del producto i por el cliente j, con demanda unitaria, es decir, el cliente quiere a lo más una unidad de cada producto de su paquete. Se asume que los clientes son $single-minded$, es decir, adquirirán todos los productos del paquete o ninguno, pero no un subconjunto de este. La empresa debe fijar los precios de forma tal que su ingreso se maximice, y teniendo en cuenta las restricciones de stock y presupuesto.

Este problema se presenta como un desafío difícil de abordar, influenciado por diversos factores como la complejidad del modelo, la disponibilidad de datos y los cambios rápidos del entorno, entre otros. En particular, los casos abordados en este trabajo carecen de un método de solución establecido, lo que motiva la búsqueda de métodos, ya sean aproximados o exactos, para resolver el problema y alcanzar los objetivos planteados.

Este problema plantea diferentes desafíos que se explican a continuación.

- Stock limitado: Esto agrega complejidad al problema, ya que el vendedor debe tomar decisiones estratégicas sobre la asignación de los productos que maximicen las ganancias.
- Precios dinámicos: A la hora de fijar los precios, estos deben adaptarse, por ejemplo, al stock de cada producto, así como también a la elasticidad de la demanda.
- Incertidumbre: Este problema contempla la incertidumbre relacionada con el orden en el que llegarán los clientes a comprar, para el caso ***Online***.
- Complejidad computacional: La complejidad computacional se refiere a cuánto tiempo y recursos computacionales se necesitan para resolver un problema. Para este problema, puede ser difícil encontrar una solución óptima en un tiempo razonable, especialmente cuando hay muchos productos y clientes involucrados, considerando el inventario.

En el trabajo, se abordan los casos ***Offline*** y ***Online*** del problema de determinación de precios para clientes con comportamiento ***single-minded*** en presencia de inventario. En el caso ***Offline***, los precios se establecen previamente a que los clientes realicen sus compras y se mantienen constantes durante el tiempo que se estime conveniente [13]. El proceso tiene lugar antes de que los productos estén disponibles para los clientes, y los precios se determinen utilizando información completa, es decir, se conoce la distribución del presupuesto y la formación de paquetes de cada cliente. En este caso, se atienden a todos los clientes de manera simultánea, y la empresa elige de alguna manera a quién vender, escogiendo precios estratégicos para que compren aquellos clientes que generan un mayor ingreso. En este caso, se emplearán estrategias que utilicen precios únicos y fijos.

- Precio único: El precio asignado es igual para todos los productos y constante.
- Precio fijo: Los precios asignados son contantes pero suelen variar entre los diferentes productos.

El caso *O ine* se presenta en diversas industrias, incluyendo el cine, espectáculos, entre otras. En el contexto cinematográfico, se establece un único costo de entrada para todos los clientes. Asimismo, en eventos musicales, cada sector cuenta con un precio de venta fijo que permanece inalterado una vez establecido.

En el marco del caso *Online*, los clientes llegan de manera secuencial, introduciendo la noción de tiempos de venta, donde en cada período de tiempo llegará un cliente a comprar. El horizonte de venta es discreto y de longitud $|N|$. Este caso se caracteriza por la capacidad de ajustar y adaptar dinámicamente los precios en respuesta a factores relevantes, como la demanda actual y la disponibilidad de inventario. Además, no se conoce de antemano la secuencia de llegada de los clientes; únicamente se tiene información detallada del cliente que está siendo atendido en ese momento. En este contexto, el principal desafío consiste en desarrollar estrategias de precios que, ya sea a través de precios no adaptativos o adaptativos, permitan maximizar las ganancias en un caso donde la toma de decisiones precisa y rápida es fundamental.

- Precios no adaptativos: Pueden ser precios únicos o fijos. Estos se establecen al comienzo del período y no pueden modificarse hasta su conclusión.
- Precios adaptativos: Pueden ser precios únicos o fijos y se ajustan a medida que trascurre el tiempo durante un periodo específico. En otras palabras, estos precios tienen la capacidad de cambiar o ajustarse a medida que avanza el tiempo, y dicha variación dependerá de la estrategia aplicada.

El caso *Online* se manifiesta en diversas industrias, abarcando sectores como el transporte, la hotelería, la industria minorista, y el comercio electrónico, entre otros. Ejemplos frecuentes incluyen la venta de vuelos comerciales, donde los precios se ajustan según la temporada y la demanda, así como el alquiler de departamentos, donde las tarifas varían en función de la ocupación, el horario y el día.

1.2. Trabajo Previo

En la literatura, se han explorado múltiples adaptaciones del problema de fijación de precios. En cuanto a las variaciones del problema que se abordan en la literatura, estas se enfocan en el comportamiento de los clientes, el inventario de los productos, el tipo de método, entre otros factores relevantes. En cuanto a los clientes, existen diferentes modelos dependiendo de su comportamiento. Por ejemplo, los clientes del tipo *single-minded* desean comprar sólo un subconjunto determinado de productos, y lo hará mientras que el precio del conjunto de productos sea inferior o igual que su presupuesto [5]. Otro tipo de clientes son aquellos que desean *unit-demand* (demanda unitaria), es decir, clientes que comprarán solo una unidad de un producto [2]. Respecto a los productos, puede considerarse inventario limitado [5] o ilimitado [2].

Algunas estrategias de precios consideran, por ejemplo, el inventario que se tiene en una empresa y la existencia de clientes estratégicos. Se refiere a un cliente estratégico cuando compra en el momento que maximiza su utilidad [6]. Otro tipo de estrategias que se utilizan en la práctica es realizar descuento de acuerdo a la cantidad de productos que compran los clientes. Por parte de los clientes, existen diferentes estrategias [7]. Una de ellas se basa en la utilidad que le entrega cada producto, es decir, cada cliente tiene una valoración para cada producto y esta valoración va cambiando a medida que pasa el tiempo, por lo que el cliente comprará cuando tenga mayor beneficio [1].

En los trabajos de Bucarey et al. [3] y Zhang et al. [13], resuelven un problema para clientes con comportamiento *single-minded*, pero el modelo y el enfoque de resolución son distintos.

En el estudio realizado por Bucarey et al. [3], se plantean formulaciones matemáticas y modelos linealizados para abordar el problema. Para resolverlo, se presentó inicialmente una descomposición de Bender, que no logró obtener resultados satisfactorios debido a la complejidad computacional. Posteriormente, se desarrolló una heurística que, aunque es un método de aproximación, proporciona resultados aceptables y puede resolver el problema en un tiempo razonable. Es relevante señalar que en el enfoque de Bucarey et al. [3], no se considera la gestión de inventario. En contraste, en la tesis en cuestión, se aborda un problema similar, pero con la incorporación del manejo de inventario. Además, al igual que en el estudio de Bucarey et al. [3], también se emplearán heurísticas para resolver el problema.

En el trabajo de Zhang et al. [13], se presentan algoritmos dirigidos a resolver el problema de fijación de precios en un contexto que hay un vendedor con distintos tipos de productos y diferentes compradores con comportamiento *single-minded* en los casos de venta *Offline* y *Online*. El enfoque de la investigación se centra en analizar la complejidad computacional del problema y la importancia de la información disponible. Se destaca que, en el caso *Online*, la disponibilidad de información es limitada en comparación con el caso *Offline*, donde se dispone de datos históricos para respaldar la asignación de precios. Es relevante señalar que, a diferencia del problema abordado en este trabajo, en el estudio de Zhang et al. [13], se pueden vender más de un paquete de productos por cliente. Además, en el estudio de Zhang et al. [13] en el caso de venta ***Online***, no se considera información sobre el futuro al igual que en este trabajo.

Por otra parte, el estudio realizado por Raj et al. [12] aborda un problema de fijación de precios de productos en paquetes de múltiples productos y múltiples cantidades. El objetivo es determinar los precios de los productos que contienen los paquetes personalizados para los clientes en un mercado B2B (Business-to-Business). Los autores propusieron un marco de trabajo compuesto por tres pasos y emplearon el método de optimización de Nelder-Mead para su resolución. El objetivo del método era ajustar la metodología a las características y dinámicas particulares del mercado B2B.

En contraste con la investigación presente, que se enfoca en la fijación de precios para clientes con comportamiento single-minded en casos ***O ine*** y ***Online***, el enfoque de Raj et al. [12] se centra en la fijación de precios para paquetes personalizados en el ámbito B2B. Mientras que en este estudio se considera la venta de un solo paquete por cliente, Raj et al. [12] abordan la venta de múltiples paquetes a un mismo cliente. Además, mientras que Raj et al. [12] emplean el método de optimización de Nelder-Mead, esta investigación utiliza modelos y algoritmos diseñados específicamente para resolver el problema de fijación de precios en presencia de inventario.

En la investigación de Chen et al. [4], realizaron un análisis teórico y encontraron modelos específicos para abordar el problema de fijación de precios para bienes nuevos y experienciales. En comparación a los otros estudios mencionados [3, 13, 12], en el estudio de Chen et al. [4] se enfocaron en fijar precios a bienes nuevos y experiencias únicas para clientes. En cambio, las otras investigaciones buscaron fijar precios a productos en específico. Para ello, plantean un modelo dinámico que considera la incertidumbre en la valoración del consumidor y la información limitada, considerando las características específicas de dicho contexto. A través de este modelo, se exploran conceptos económicos y modelos matemáticos para comprender el comportamiento del consumidor, la dinámica de precios y las estrategias de fijación de precios en el contexto de los bienes nuevos y experienciales.

El estudio de Ma et al. [10] aborda un problema identificado en una empresa de bienes de consumo envasados (CPG, por sus siglas en inglés), donde se busca encontrar combinaciones de precios para un surtido de productos de manera ***Online***, utilizando precios dinámicos no adaptativos. Esta empresa opta por planificar calendarios de precios debido a la complejidad operativa y la dificultad de planificar con precios adaptativos. El enfoque del método de resolución consiste en determinar diferentes precios para los productos, considerando aspectos como la demanda, los costos, las restricciones de capacidad y las preferencias de los clientes. Aunque este enfoque comparte similitudes con la investigación actual, existen diferencias significativas en cuanto a los tipos de productos considerados, las restricciones específicas de inventario y las estrategias de fijación de precios implementadas. Estas divergencias sugieren la oportunidad de explorar otras alternativas en la presente investigación.

1.3. Resultados

En el contexto del PDPSMI, el objetivo principal del estudio es establecer una base teórica respaldada por algoritmos y modelos con el propósito de facilitar la toma de decisiones en el complejo panorama comercial. Se investigaron los casos *O ine* y *Online*. Los resultados, específicos para cada caso, se obtuvieron a través de la medición de la rapidez en cuanto a los tiempos computacionales de ejecución y la eficiencia en términos de ingresos de cada modelo y algoritmo implementado.

Caso *O ine*

En este caso, se examinaron estrategias de fijación de precios que abarcaban tanto precios únicos como precios fijos para los productos. Se observó que las estrategias basadas en precios únicos ofrecían ingresos eficientes y tiempos de ejecución aceptables, aunque no alcanzaban la máxima eficiencia en términos de ingresos. Por otro lado, las estrategias con precios fijos demostraron lograr la mayor eficiencia en ingresos y tiempos de ejecución más rápidos. Sin embargo, se notó que a medida que aumentaba el nivel de stock, algunas de estas estrategias podían volverse menos eficientes, lo que resultaba en un aumento en el GAP y tiempos de ejecución más prolongados. (Ver Capítulo. 2).

Caso *Online*

Para este caso, se evaluaron estrategias que utilizan tanto precios únicos como fijos, abordando tanto precios no adaptativos como adaptativos. Se encontró que las estrategias con precios únicos en el caso de precios no adaptativos son las más rápidas en proporcionar soluciones, aunque no garantizan la máxima eficiencia en ingresos. Por otro lado, las estrategias con precios fijos muestran un equilibrio entre velocidad y eficiencia de ingresos, aunque algunas pueden presentar cierta variabilidad en términos de ingresos. (Ver Sección. 3.1). En relación a los precios adaptativos, las estrategias con precios únicos lograron ingresos razonables, pero con tiempos de ejecución más prolongados, mientras que las estrategias con precios fijos mostraron resultados diversos, desde eficiencia en ingresos con tiempos de ejecución más altos hasta mayor velocidad con menor eficiencia en ingresos. (Ver Sección. 3.2).

1.4. Organización

A lo largo del trabajo, se han creado diversos algoritmos y modelos destinados a abordar el PDPSMI, tanto en los casos *O ine* como *Online*.

En el capítulo 2, se explora el caso *O ine*, donde se presenta el Modelo de Optimización Entera (MOE) aplicando el Método de Precio Único. Asimismo, se introduce el Modelo Lineal Entero Mixto (MILP) y la Heurística Ratio (HR) aplicando el Método de Precios Fijos. Posteriormente, se lleva a cabo un estudio computacional que evalúa la eficiencia y rapidez de los distintos modelos y algoritmos, utilizando instancias aleatorias y específicas obtenidas de la investigación realizada por Bucarey et al.[3]. El capítulo concluye con una síntesis de los resultados obtenidos en el estudio computacional.

En el Capítulo 3, se aborda el caso *Online*, explorando algoritmos para la determinación de precios no adaptativos y adaptativos. En la Sección 3.1, dedicada a los precios no adaptativos, se desarrolla inicialmente la Heurística Precio Único, que considera precios únicos para los productos. Posteriormente, se presentan las Heurísticas Beta, Óptimos y Relajados, las cuales utilizan precios fijos para determinar los precios de los productos. En la Sección 3.2, enfocada en los precios adaptativos, se presentan las Heurísticas Cocientes Dinámicos Adaptativos, MILP Dinámicos Adaptativos y Precio Único Dinámico Adaptativo. Las dos primeras utilizan precios fijos, mientras que la tercera emplea un enfoque de precio único.

Al finalizar cada sección sobre precios no adaptativos y adaptativos, se lleva a cabo un estudio computacional que replica la metodología del Capítulo 2. Este estudio utiliza las mismas instancias para evaluar la eficiencia y velocidad de las estrategias abordadas en cada sección.

Capítulo 2

Caso Offline

El caso *Offline*, es un enfoque del problema de fijación de precios definido previamente, donde los precios luego de ser asignados son inmutables, es decir, no se pueden modificar o alterar. Para poder fijar los precios, se considerará información completa, es decir, que se conoce el presupuesto y el paquete de productos de cada cliente. Con esto, se buscará determinar los precios que permitan obtener el mayor ingreso posible para la empresa.

Cabe destacar que para este enfoque los clientes llegan de manera simultánea, por lo que los precios escogidos deben tratar de capturar el mayor porcentaje del presupuesto de los clientes. Además, se debe considerar el stock de cada producto. Para este caso, los precios se determinan de diferentes formas. Estos, se verán a continuación en la Sección 2.1 y 2.2.

2.1. Método Precio Único (MPU)

Una estrategia de fijación de precios consiste en asignar precios únicos, es decir, establecer el mismo precio para todos los productos. Dicha estrategia de fijación de precios puede ser beneficioso en situaciones donde la variabilidad de precios puede causar confusión o resistencia por parte de los clientes. Ejemplos para este tipo de asignación incluyen la venta masiva de productos, entradas de cine, suscripciones estándar a servicios en línea, entre otros.

Para esta estrategia de fijación de precios, se analizan todos los posibles ingresos generados a partir de precios únicos que son candidatos a ser óptimos. El objetivo es asignar el precio único que genere el mayor ingreso, considerando que los clientes que compran deben cumplir con la restricción de presupuesto y stock de productos.

Para implementar esta asignación de precios, se utiliza el siguiente algoritmo que contiene la función *clients_to_serv* y el Modelo de Optimización Entera (MOE), que se explicará a continuación. El algoritmo inicia calculando los precios candidatos a ser óptimos. Estos precios se determinan dividiendo el presupuesto de cada cliente entre la cantidad de productos que contiene su paquete. Posteriormente, dichos precios se registran en la lista de precios PU.

Luego, la función *clients_to_serv* selecciona un precio $p^u \in PU$ y se aplica la restricción de presupuesto (2.1)(línea 5 del pseudocódigo) con el fin de obtener los clientes factibles $N_{p^u} \subseteq N$. Los clientes factibles son aquellos cuyos presupuestos son superiores o iguales al valor de su paquete generado por dicho precio.

$$p^u \cdot |S^j| \leq b^j, \quad \forall j \in N \tag{2.1}$$

Una vez determinado el conjunto N_{p^u}, se seleccionan los clientes a quienes se les venderá. Para ello, se resuelve el siguiente problema de programación entera, llamado MOE.

$$
\begin{aligned}
\text{(MOE)} \qquad & \text{máx} \sum_{j \in N_{p^u}} p^u \cdot |S^j| \cdot x_j && (2.2)\\
& \text{s.t.} \sum_{j \in N_{p^u}} S_i^j \cdot x_j \leq m_i, \quad \forall i \in M && (2.3)\\
& x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in N_{p^u} && (2.4)
\end{aligned}
$$

El modelo proporciona el ingreso generado para cada precio p^u, así como también el conjunto óptimo de clientes a quien venderle. La función objetivo (2.2) calcula el ingreso generado por cada precio considerando los clientes factibles, donde x_j es una variable binaria que indica si el cliente j realiza la compra o no. Posteriormente, se presenta la restricción de stock (2.3), la cual verifica la disponibilidad de stock de los productos demandados. Finalmente se escoge el precio único que genera el mejor ingreso posible. El MOE puede ser difícil de resolver, pero con las instancias utilizadas en esta tesis se encuentra el óptimo.

El pseudocódigo del MPU es 1:

Algorithm 1 Algoritmo MPU

Require: b^j, S^j ▷ Presupuesto del cliente, Paquete
$Cliente\_Fact \leftarrow []$ ▷ Se crea la lista para guardar los clientes factibles
$Ingreso\_total \leftarrow 0$ ▷ Ingreso total inicializado en 0
$PU \leftarrow []$ ▷ Se crea la lista para guardar los precios PU
$Ingreso\_por\_precio \leftarrow []$ ▷ Se crea la lista para guardar el ingreso por precio único
for cada cliente j en Clientes **do**
  Agregar $(\frac{b^j}{|S^j|})$ a PU
end for
for cada precio p^u en PU **do**
  procedure CLIENTS_TO_SERV(p^u, N, M, m) ▷ Crear Función
    $Cliente\_Fact = \{j \in N : |S^j| \cdot p^u \leq b^j\}$ ▷ Filtrar clientes factibles
    Resolver (MOE) para Cliente_Fact ▷ Aplicar MOE
    for cada producto i en Productos **do**
      $\sum x_j \cdot |S_i^j| \leq m_i$, para todo j en $Cliente\_Fact$ ▷ Restricción de inventario
    end for
    $Ingreso = \sum p^u \cdot |S^j| \cdot x_j$, para todo j en $Cliente\_Fact$ ▷ Calcular el ingreso total
    Agregar $(p^u, Ingreso, Cliente\_Fact)$ a $Ingreso\_por\_precio$
  end procedure
end for
Ordenar $Ingreso\_por\_precio$ por el ingreso en orden descendente ▷ Ordenar por ingreso descendente
$(\text{Precio}, \text{Ingreso\_maximo}, \text{Clientes}) \leftarrow$ Primer elemento en $Ingreso\_por\_precio$
Devolver $Precio$, $Ingreso\_maximo$, $Clientes\_maximo$

El algoritmo 1, comienza calculando los precios p^u, los cuales se almacenan en la lista PU. Luego, la función *clients_to_serv* para cada precio p^u, determina los clientes factibles. Posteriormente, se aplica el MOE y la función entrega el ingreso total para cada precio, así como también el conjunto de clientes que compran. Luego se ordenan de forma descendente los ingresos, para así escoger el precio que genera el mayor ingreso con el conjunto de clientes que compran.

Ejemplo: En el siguiente escenario, una empresa que desea vender un conjunto de productos $M = \{1, 2, 3, 4\}$ a un conjunto de clientes $N = \{1, 2, 3\}$. Cada cliente tiene un presupuesto $b^j > 0$ y cada producto i tiene asociado un stock m_i. Se denota S^j al paquete del cliente j y S_i^j a la demanda del producto i del cliente j.

Los presupuestos de los clientes se generaron de manera aleatoria utilizando la función de distribución uniforme entre 1 y 10, y se obtuvo el siguiente vector:

$$b = [5.08, 4.51, 9.94]$$

El stock de cada producto se determinó mediante una variable aleatoria uniforme entre 1 y

3. Los productos tendrán una demanda menor o igual a la cantidad de clientes. Los clientes tienen demanda unitaria por cada producto de interés. El vector de stock obtenido fue:

$$m = [3, 2, 1, 1]$$

Por otro lado, consideraremos la siguiente matriz de interés:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

En la matriz (2.5), cada fila representa un cliente y cada columna un producto, indicando con 1 el interés en dicho producto y con 0 la falta de interés, para cada cliente.

Con la información indicada, se calculan los precios candidatos a ser óptimos y obtenemos los siguientes resultados:

- Para el cliente 1, con un presupuesto de $b^1 = \$5.08$ y un paquete de tamaño $|S^1| = 2$, el precio factible es $p^1 = \frac{5.08}{2} = \$2.54$.
- Para el cliente 2, con un presupuesto de $b^2 = \$4.51$ y un paquete de tamaño$|S^2| = 3$, el precio factible sería de $p^2 = \frac{4.51}{3} = \$1.50$.
- Para el cliente 3, con un presupuesto de $b^3 = \$9.94$ y un paquete de tamaño $|S^3| = 3$, el precio factible sería de $p^3 = \frac{9.94}{3} = \$3.31$.

Una vez que se obtienen los precios, se aplica la función *clients_to_serv* a esta instancia para cada uno de los precios. Los resultados obtenidos se exponen en la Tabla 2.1.

Precio	Clientes factibles	Clientes que compran	Ganancias
\$2.54	1,3	1,3	\$12.7
\$1.50	1,2,3	1,3	\$7.5
\$3.31	3	3	\$9.93

Tabla 2.1: Ganancias obtenidas para cada precio aspirante a óptimo y clientes que compran.

La Tabla 2.1 releva los clientes factibles para cada precio, así como también los clientes que compran y la ganancia total obtenida. Al analizar los resultados, se observa que para el precio de \$1.50, todos los clientes son factibles, pero la venta se realiza únicamente a los clientes 1 y 3. Esto se debe a la restricción de stock, ya que el cliente 1 y 2 tienen interés por el producto 3, y el cliente 2 y 3 tienen interés por el producto 4, con un stock de una unidad para cada producto. Por lo tanto, la venta debe ser a los clientes que no tengan esos productos en común y estos clientes son los 1 y 3.

Para los precios de \$2.54 y \$3.31, los clientes factibles son los mismos que finalmente realizan compras. Esto indica que los clientes cumplen con la restricción de presupuesto y hay suficiente stock para los productos demandados. En conclusión, según el breve análisis, el precio que genera el mayor ingreso es \$2.54, con un ingreso total de \$12.7, y las compras son realizadas por los clientes 1 y 3.

En la sección 2.3 se harán estudios computacionales de esta estrategia para analizar de manera más precisa su eficiencia y rapidez.

2.2. Método Precio Fijo (MPF)

El MPF es otra estrategia para determinar precios para el caso *Offline*, donde cada producto se le asocia un precio que suele ser distinto para cada producto y constante. Ejemplos comunes de la estrategia incluye los menús de restaurantes de comida rápida, la fijación de precios estándar para productos en tiendas minoristas y la asignación de tarifas invariables para entradas de eventos, entre otros.

El MPF fue abordado inicialmente mediante una adaptación del MOE, previamente empleado para precios únicos. Esta adaptación tenía como objetivo buscar de manera aleatoria y exhaustiva vectores de precios en lugar de establecer un único precio para todos los productos. No obstante, esta aproximación demostró ser computacionalmente demandante, especialmente al enfrentarse a instancias de mayor complejidad. De hecho, se evidenció que es complejo incluso para conjuntos de datos pequeños. Este hallazgo resalta que, a medida que las instancias de datos se amplían, la complejidad computacional aumenta considerablemente, presentando desafíos sustanciales en términos de procesamiento de datos.

En particular, en el ejemplo utilizado para el MPU, la determinación de a qué clientes vender resulta evidente mediante el vector de precios P, el cual se define según ciertas condiciones. Al examinar la matriz de interés (2.5), se observa que los clientes 2 y 3 expresan interés por el producto 4, del cual hay solo una unidad disponible. Por lo tanto, se decide por vender al cliente 3 debido a su mayor presupuesto. En consecuencia, se establece la condición: $p_1 + p_2 + p_4 = b^3$. Del mismo modo, el cliente 1 desea adquirir los productos 2 y 3, siendo el producto 2 de interés por los clientes 1 y 3. Para fijar el precio de este producto, es necesario considerar las condiciones: $p_2 + p_3 = b^1$ y $p_2 \leq b^1$.

Con dichas condiciones, es posible obtener combinaciones óptimas de precios, representadas por el vector $P = [p_1, p_2, p_3, p_4]$, que maximicen los ingresos. En tal escenario, el mayor ingreso se logra al sumar los presupuestos de los clientes 1 y 3. Un ejemplo del vector de precios que satisface estas condiciones óptimas sería $P = [1.81, 2.71, 2.37, 5.42]$.

Observación: Una estrategia simple para identificar a qué cliente se puede vender en instancias pequeñas es utilizar la condición (2.6):

$$\max_{j \in N} b_j \geq \sum_{j \in N / \{j^*\}} b_j \tag{2.6}$$

Donde j^* representa el cliente cuyo presupuesto supera la suma de los presupuestos de los demás clientes. En el caso de la instancia actual, se observa que se venderá al cliente 3 ya que su presupuesto es mayor que la suma de los presupuesto de los clientes 1 y 2, es decir, $b_3 \geq b_1 + b_2 \rightarrow \$9.94 \geq \$9.59$.

La estrategia de búsqueda exhaustiva para la fijación de precios fijos resulta ineficiente, como se mencionó anteriormente, incluso para instancias pequeñas se requiere un tiempo considerable de procesamiento de datos.

En la investigación de Bucarey et al. [3], proponen una solución alternativa mediante un modelo no lineal (NLM, por sus siglas en ingles). Luego, utilizando las desigualdades de McCormick [11], se linealiza el modelo, convirtiéndolo en un modelo lineal entero mixto (MILP, por sus siglas en ingles). El modelo (LM1) presentado en [3] no considera inventario limitado y tiene por objetivo proporcionar un vector de precios óptimos que generen el mayor ingreso posible. El modelo se utilizó como base para crear una variante que sí considera el stock disponible para cada producto. El modelo se presenta en la siguiente sección.

2.2.1. Modelo Lineal Entero Mixto (MILP)

Esta estrategia de determinación de precios busca encontrar de manera óptima el vector de precios, considerando las restricciones de stock y presupuesto para clientes de comportamiento *single-minded*, así como el inventario de productos. Para lograr esto, se utilizará la formulación de un modelo lineal entero mixto, permitiendo determinar los precios óptimos. La función objetivo del modelo incorpora la variable r_j, definida como $r_j := x_j \sum_{i \in S^j} p_i$, que representa el beneficio o ingreso entregado por el cliente j. Además, se incluye la variable $p_i \in P$, que indica el precio del producto i, y la variable binaria x_j, que señala si el cliente $j \in N$ adquiere o no los productos. La estrategia busca maximizar el beneficio total considerando las preferencias de los clientes y las limitaciones de inventario.

El modelo se presenta de la siguiente forma:

$$\text{(MILP)} \qquad \max \sum_{j \in N} r_j \tag{2.7}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j \in N} x_j S_i^j \le m_i, \quad i \in M \tag{2.8}$$

$$r_j \le b^j x_j, \quad j \in N \tag{2.9}$$

$$r_j \le \sum_{i \in S^j} p_i, \quad j \in N \tag{2.10}$$

$$r_j \ge 0, \quad j \in N \tag{2.11}$$

$$r_j \ge \sum_{i \in S^j} p_i - U(1 - x_j), \quad j \in N \tag{2.12}$$

$$p_i \ge 0, \quad i \in M \tag{2.13}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \tag{2.14}$$

La función objetivo (2.7) busca maximizar la suma de r_j, representando el ingreso total. Las restricciones de describen a continuación:

- La restricción (2.8) establece el límite de stock, garantizando que no se pueda vender más productos que el stock disponible m_i. En resumen, indica que la cantidad total de productos i comprados por los clientes j no exceda el stock disponible m_i.
- La restricción (2.9) describe la limitación de presupuesto, asegurando que el ingreso del cliente j no exceda su presupuesto.
- La restricción (2.10) garantiza que la suma de los precios de los productos dentro de un paquete para el cliente j sea igual o menor a su ingreso total. Esta condición asegura que, en caso de que el cliente j realice una compra, su ingreso será igual a la suma de los precios de los productos demandados
- Las restricciones (2.11) y (2.13) aseguran que los precios de los productos y los ingresos de los clientes sean positivos o 0.
- La restricción (2.12) garantiza que los ingresos generados por los clientes sean coherentes con las compras y los precios de los productos. Por ejemplo, si $x_j = 1$ (es decir, el cliente j compra), la expresión $U(1 - x_j)$ es 0 por lo que el ingreso del cliente j es igual a la suma de los precios para los productos demandados. En caso contrario, si $x_j = 0$, el término $U(1 - x_j)$ es negativo y la expresión $\sum_{i \in S^j} p_i - U(1 - x_j)$ es negativa ya que U es un valor muy grande. Esto sería redundante, ya que r_j debe ser positivo o 0 según las demás restricciones.
- En (2.14) se indica la naturaleza de la variable.

Ejemplo: Al aplicar este modelo a la instancia que utilizó como ejemplo en el MPU, se obtuvo el siguiente vector de precios: $P = [0, 5.08, 0, 4.85]$, comprando los clientes 1 y 3, generando una ganancia de \$15.02.

Este modelo enfrenta limitaciones computacionales para instancias grandes y stocks cercanos a la demanda, como se explica en [3]. Por lo que en la sección 2.3 se harán estudios computacionales de esta estrategia para analizar de manera más precisa su eficiencia y rapidez. Como alternativa, se introduce una heurística de aproximación que proporciona soluciones en tiempo razonable, explorada en la siguiente sección.

2.2.2. Heurística Ratio (HR)

La Heurística Ratio (HR) es una estrategia que se basa en la premisa de tener información completa, es decir, conocer el presupuesto de cada cliente, la demanda de productos por parte de cada cliente y el stock disponible. La heurística se divide en dos etapas: la primera se enfoca en obtener un vector de precios, y la segunda se encarga de determinar a qué clientes se les venderá.

Parte 1: Obtención del vector de precios.

La primera fase de la heurística se inicia calculando el ratio π para cada cliente, dividiendo el presupuesto de cada cliente entre la cantidad de productos en su paquete. Una vez obtenido los ratios, se ordenan los clientes de forma descendente en función de estos valores. Luego, para determinar los precios, se procesan los clientes en ese orden analizando el paquete de cada cliente, hasta determinar todos los precios de los productos. Antes de considerar a un cliente en el proceso de determinación de precios, se verifica si el resultado de la resta entre su presupuesto asignado y la suma de los precios ya fijados es positivo, esta restricción se considera porque varios clientes tienen demandas por los mismos productos. Esto implica que únicamente se incluirá al cliente en la determinación de precios si, después de restar los precios previamente establecidos, todavía dispone de presupuesto para adquirir los productos adicionales contenidos en su paquete. Una vez realizada dicha verificación, denotada en la restricción (2.15), se establece la ecuación (2.16):

$$b^j - \sum_{i \in S^j : p_i \neq null} p_i > 0 \tag{2.15}$$

$$\sum_{i \in S^j : p_i = null} p_i = b^j \tag{2.16}$$

Una vez verificado el cliente, la ecuación (2.16) establece que la suma de los precios p_i asociados a los productos i que forman parte del paquete del cliente j, pero que aún no han sido determinados, debe igualar el presupuesto asignado al cliente j.

Luego, las siguientes ecuaciones se generan para garantizar la proporcionalidad de los precios, asignando un precio más alto a los productos con menor inventario y un precio más bajo a aquellos con mayor inventario. Estas ecuaciones se obtienen multiplicando el inventario de cada producto por su respectivo precio, y deben cumplirse para todos los productos en el paquete del cliente.

$$m_i \quad p_i = m_k \quad p_k, \quad i,k \in S^j \tag{2.17}$$

Parte 2: Determinación de a qué clientes vender.

Después de obtener los precios en la primera parte, se procede a la segunda etapa para determinar a qué clientes vender. En esta fase, se utiliza la función *clients_to_serv*, empleada también en el MOE, lo que facilita el cálculo de a qué clientes vender y cuánto ganar.

Ejemplo: Considerando la misma instancia como ejemplo para el método de precio fijo, la heurística opera de la siguiente manera:

1. En la primera etapa, se calcula el ratio π para cada cliente, obteniendo los valores $\pi_1 = 2.54$, $\pi_2 = 1.5$, y $\pi_3 = 3.31$. Estos ratios se ordenan de manera descendente, determinando el siguiente orden para los clientes: $3, 1, 2$.
2. Luego, se selecciona al cliente con el mayor ratio, que en este caso es el cliente 3, verificando que dispone con presupuesto para poder determinar los precios de su paquete, y se formula el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_4 &= 9.94 \\ 3p_1 &= 2p_2 \\ 2p_2 &= p_4 \end{aligned}$$

Se determinan los precios para los productos $[p_1, p_2, p_4]$, resultando el vector $P = [\$1.8, \$2.71, p_3, \$5.43]$. Una vez establecidos los precios para estos productos, se procede al siguiente cliente, en este caso, el cliente 1, este tiene demanda por los productos 2 y 3. Al considerar el precio conocido $p_2 = \$2.71$, primero se verifica si el cliente 1 dispone de presupuesto para poder determinar el precio de los productos restantes en su paquete, en este caso el producto 3. $P = [\$1.8, \$2.71, p_3, \$5.43]$

$$\begin{array}{rrr} b_1 & p_2 & 0 \\ 5.08 & 2.71 & 0 \\ & 2.37 & 0 \end{array}$$

Una vez verificado que el cliente dispone de presupuesto se genera el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
p_2 + p_3 &= 5.08 \\
p_3 &= 5.08 \quad p_2 \\
p_3 &= 5.08 \quad 2.71 \\
p_3 &= \$2.37
\end{aligned}
$$

Esto da como resultado un precio de $2.37 para el producto p_3, lo que culmina en el vector de precios $P = [\$1.8, \$2.71, \$2.37, \$5.43]$.

3. Finalmente, utilizando el vector de precios obtenido en la fase 1, se aplica la función *clients_to_serv* para determinar a qué clientes se les venderá y cuánto se ganará. En este ejemplo, se observa que los clientes que realizan compras son los clientes 1 y 3, generando así una ganancia total de $15.02 para la empresa.

La Heurística Ratio se encuentra descrita como pseudocódigo en el Algoritmo 2:

Algorithm 2 Algoritmo para Calcular Precios

function CALCULARPRECIOS(clientes, productos)
  productos_copia = copiar.productos
  Ordenar clientes por el mejor ratio $\pi = \left(\frac{b^j}{jS^j j}\right)$ en orden descendente
  for cada cliente j en clientes **do**
    total_presupuesto = j.budget ▷ Presupuesto disponible para el cliente j
    bundle = j.bundle ▷ Paquete del cliente j
    for cada índice i en el rango de la longitud de paquete **do**
      if bundle[i] == 1 **then** ▷ Si es 1, se calcula el precio del producto
        precio_producto = productos_copia[i].precio
        if precio_producto $>$ 0 **then**
          total_presupuesto = total_presupuesto - precio_producto
        end if
      end if
    end for
    if total_presupuesto   0 **then**
      continuar al siguiente cliente
    end if
    for cada índice i en el rango de la longitud de bundle **do**
      if bundle[i] == 1 y productos_copia[i].precio   0 **then**

        for cada índice i en el rango de la longitud de productos_copia **do**
          Imprimir precio final del producto i
        end for
  Devolver productos_copia

El algoritmo 2 toma como entrada una lista de clientes con presupuestos y paquetes de productos asociados, así como un stock de productos. Luego, organiza a los clientes en orden descendente según el ratio específico para cada cliente e itera sobre los clientes en ese orden. Para cada cliente, calcula los precios de los productos en su paquete, teniendo en cuenta el presupuesto disponible y los productos que aún no tienen precio. Finalmente, devuelve una lista con los precios actualizados de los productos.

A continuación, se efectúa una comparación de los ingresos entre las distintas estrategias para el caso *O ine* (MPU, MILP, HR). Los resultados de cada estrategia, que incluyen el vector de precios, los clientes que efectúan compras y los ingresos totales, se presentan en la Tabla 2.2.

	Precio Único	Precio Fijo	
	MPU	MILP	HR
Precio (Vector)	2.54	[0,5.08,0,4.8]	[1.8,2.71,2.37,5.43]
Clientes que compran	1,3	1,3	1,3
Ingreso Total	$12.7	$15.02	$15.02

Tabla 2.2: Variación del ingreso, clientes que compran para los diferentes tipos de estrategias.

En esta instancia específica, se destaca que la Heurística Ratio (HR) logra una combinación de precios que maximiza el ingreso total, igualando a la estrategia MILP.

2.3. Estudio Computacional

En esta sección, se presentarán y analizarán los resultados de rendimiento de los modelos y algoritmos desarrollados para el caso *Offline*. Se centrará en medir el desempeño del MILP detallado en la sección (2.2.1), el MPU explicado en la sección (2.1), así como la HR, descrita en la sección (2.2.2). Se llevará a cabo una comparación exhaustiva entre estas estrategias al aplicarlas a diversas instancias para evaluar su eficacia y rapidez.

Todas las implementaciones se realizaron en Spyder, un entorno de desarrollo integrado (IDE, por sus siglas en ingles), que facilita la creación y ejecución de códigos en Python 3. Las ejecuciones de código se llevaron a cabo en un MacBook Air con procesador M1 y 8 GB de RAM.

2.3.1. Instancias Aleatorias

En esta serie de instancias, cada cliente $j \in N$ tiene un presupuesto positivo, distribuido uniformemente en el intervalo $[1, 1000]$. Cada cliente también posee su propio paquete, indicado por $S_i^j = 1$ si el cliente j incluye el producto i en su paquete. La disponibilidad de productos en el inventario varia según una densidad α.

Para calcular el stock m_i de cada producto i, se multiplica la demanda del producto i para todos los clientes por la mencionada densidad α. La fórmula para calcular el stock, es la siguiente (2.18):

$$m_i = \alpha \sum_{j \in N} S_i^j \tag{2.18}$$

Se llevaron a cabo experimentos utilizando 10 instancias para cada uno, abarcando diferentes configuraciones de parámetros. Los experimentos incluyen distintos valores para la cantidad de clientes $N \in \{20, 40, 60\}$, el número de productos $M \in \{20, 40, 60\}$, y la densidad del inventario $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.4, 1\}$. Estos experimentos se denotan por $K(N, M, \alpha)$.

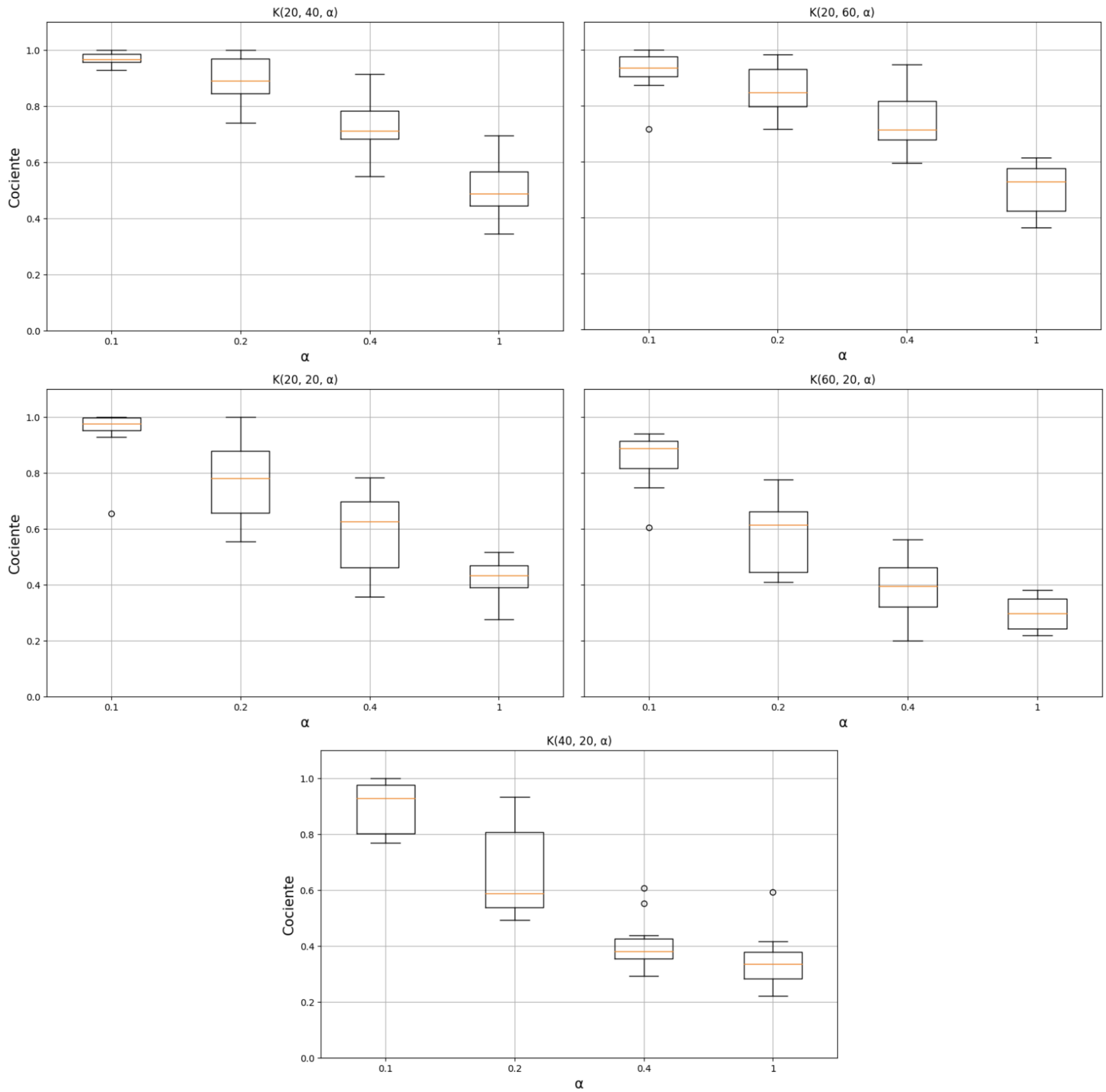


Figura 2.1: Cociente de ingresos entre la Heurística Ratio (RH) y el Modelo de Optimización Entera Mixta (MILP) para diferentes densidades de stock y combinaciones de clientes y productos.

La Figura 2.1, muestra la variación del cociente entre el ingreso óptimo del MILP y la HR para diferentes α. Se destaca que la HR establece los precios de manera eficaz, generando ingresos similares a los óptimos cuando la densidad del stock es de $\alpha = 0.1$, ya que el cociente es cercano a 1. Sin embargo, a medida que α aumenta, indicando una mayor densidad en el stock de productos, el cociente entre el ingreso óptimo y la heurística disminuye. Esto sugiere que, a menor inventario, la HR captura de manera significativa el ingreso óptimo, pero a medida que el inventario aumenta, la heurística no logra replicar tan eficientemente los ingresos óptimos.

El comportamiento antes mencionado se explica porque, con un inventario reducido, la HR establece precios según el ratio de los clientes, permitiendo que aquellos con mayores ratios realicen la mayoría de las compras, alcanzando un ingreso cercano al óptimo.

En cambio, con un inventario mayor, la HR sigue fijando precios según los ratios de los clientes, lo que limita las compras a un conjunto reducido de clientes. Los precios más altos, característicos de la heurística, limitan la base de clientes que pueden comprar, independientemente de la cantidad de stock de productos.

Se observa también que para el experimento $K(60, 20, \alpha)$, es decir, 60 clientes, 20 productos y diferentes valores de α, la mediana es aproximadamente 0.9 para $\alpha = 0.1$. Esto se debe a que el MILP sigue capturando de manera óptima los ingresos con una mayor cantidad de clientes, resultando en ingresos más elevados. En contraste, la HR, condicionada por los clientes con mayores ratios, establece precios más altos, lo que lleva a una base de clientes más reducida y, por ende, a un cociente menor.

A continuación, se llevará a cabo un análisis del ingreso generado por el MILP y la HR en un experimento particular, donde se emplearon los parámetros $K(20, 20, \alpha)$ en un total de 10 instancias.

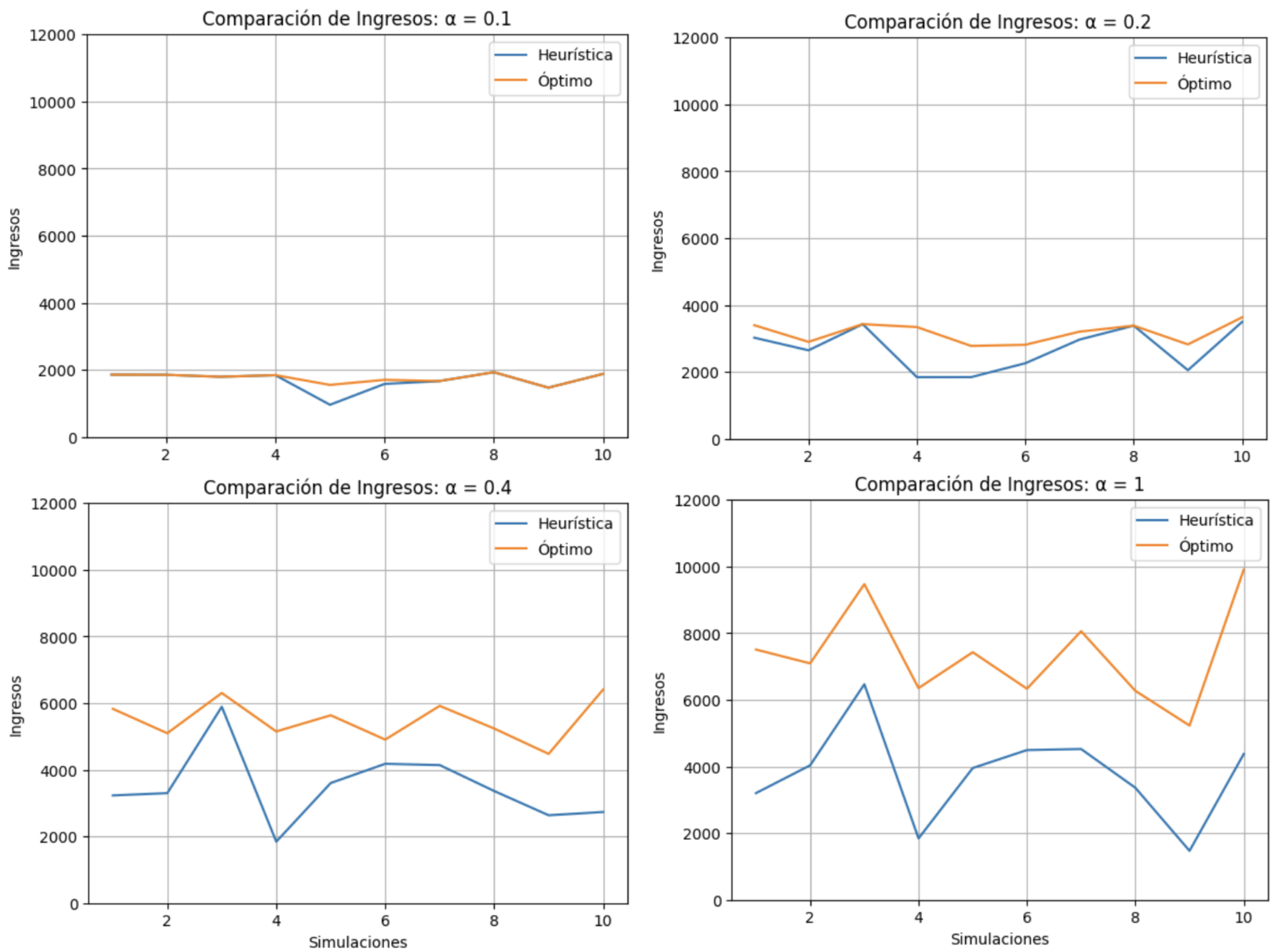


Figura 2.2: Ingresos óptimos (MILP) vs Heurística (HR) para diferentes valores del parametro α.

De la Figura 2.2 se desprende que con una densidad de stock $\alpha = 0.1$, la HR demuestra una capacidad notable para fijar precios de manera eficiente, acercándose significativamente al ingreso óptimo entregado por el MILP. Cuando el inventario iguala a la demanda, es decir, $\alpha = 1$, la HR logra captar aproximadamente el 50 % del ingreso óptimo. Este resultado sugiere que la HR, a pesar de su enfoque simplificado, es capaz de capturar una proporción considerable del ingreso óptimo en escenarios con inventario limitado.

2.3.2. Instancias utilizadas en Bucarey et al.[3]

El estudio tiene como objetivo evaluar la eficiencia y rapidez de los modelos y algoritmos en el caso *O ine*, utilizando instancias proporcionadas por la investigación de Bucarey et al.[3]. Se consideraron todas las combinaciones para las instancias de 25 y 50 clientes y productos. El presupuesto de los clientes varía en el intervalo $[1, 1000]$. Además, se tomó en cuenta la densidad de la matriz S, que está conformada por los paquetes de todos los clientes. La densidad se define como la suma de la demanda de todos los clientes dividido entre cantidad de clientes y productos. Es decir,

$$d := \frac{\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} S_i^j}{|M| \cdot |N|} \tag{2.19}$$

La densidad será explorada en los niveles $d \in \{0.1, 0.2, 0.4\}$. Para establecer el stock de los productos se utilizó la fórmula (2.18), y se consideraron los mismos parámetros para el stock α y la densidad d. Cada combinación de (M, N, d, m) se evaluó en 10 instancias.

Con el fin de evaluar la eficiencia, se examinó el ingreso promedio generado en todas las combinaciones a lo largo de las 10 instancias. En cuanto a la rapidez, se analizaron los tiempos promedio de ejecución. Los resultados de estos análisis se presentarán a través de gráficos que permitirán una comprensión de los datos.

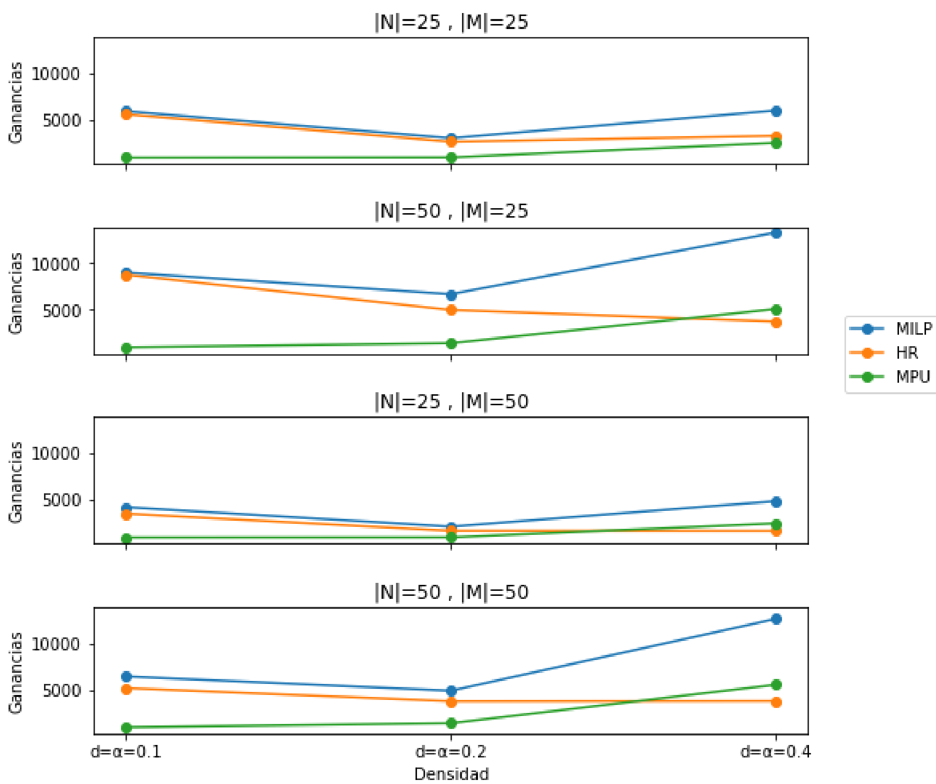


Figura 2.3: Ingresos promedio en función de distintas densidades de los parámetros de α y d para los diferentes modelos y algoritmos.

La Figura 2.3 muestra el ingreso promedio para todas las combinaciones de clientes y productos considerando diversas densidades para la matriz de interés S. La Heurística Ratio demuestra eficiencia cuando el stock de productos es limitado $d = \alpha = 0.1$ y 0.2 . En estas condiciones, el ingreso obtenido por la HR se asemeja al ingreso óptimo obtenido por el MILP. Sin embargo, a medida que la densidad d, junto con el stock α, aumenta, la pérdida de ingresos al utilizar la HR en comparación con el MILP se incrementa. Lo anterior se debe a que la heurística fija los precios tratando de capturar el presupuesto de los clientes con mayor ratio, resultando en una base constante de clientes compradores, independientemente del stock. También se observa que utilizando el MPU, el ingreso total aumenta a medida que aumenta la densidad de la matriz S y el stock. Es razonable considerar utilizar el MPU en vez de la HR en instancias con una densidad igual o superior que $d = \alpha = 0.4$.

En la Figura 2.4 se aprecian lo tiempos de ejecución:

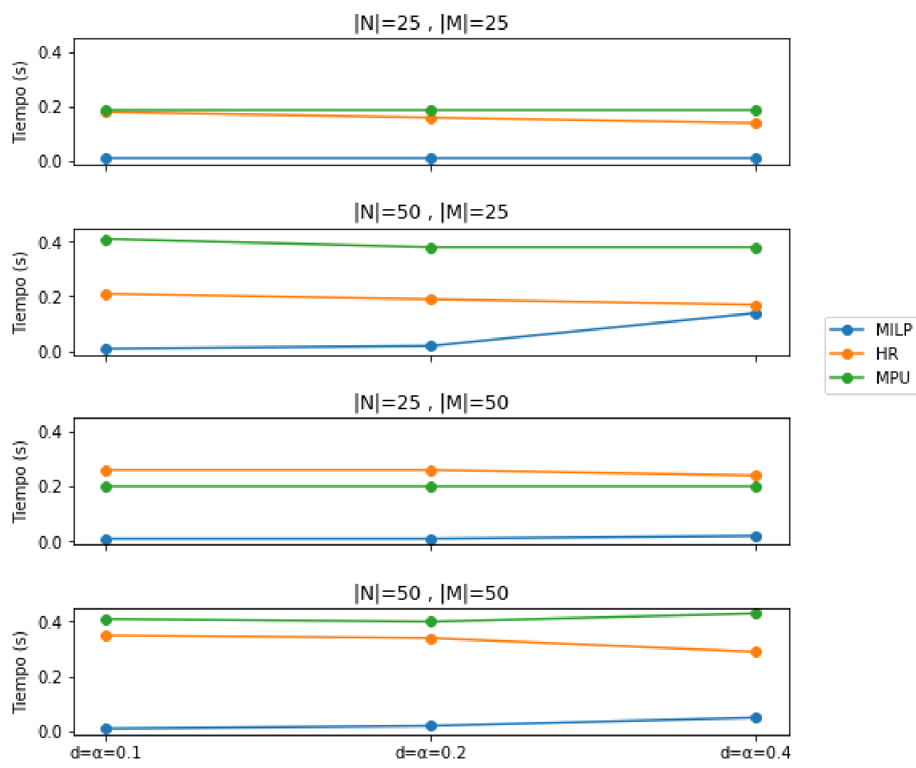


Figura 2.4: Tiempos promedio de ejecución en función de distintas densidades de los parámetros de α y d para los diferentes modelos y algoritmos.

En la Figura 2.4 se observa que, para estas instancias, el MILP se resuelve en fracciones de segundo, proporcionando una solución óptima de manera eficiente. En comparación con la HR y el MPU, el MILP emerge como la opción más rápida y eficiente.

Si bien el MILP muestra eficiencia para instancias que contemplan hasta 50 clientes y productos, con un stock de hasta $\alpha = 0.4$, se procederá a analizar su desempeño en una instancia de mayor tamaño.

Instancia jNj=150, jMj=75, d=0.4.

Se considera una instancia más grande, con 150 clientes y 75 productos, manteniendo una densidad $d = 0.4$ en la matriz de interés S. Se variará el stock α en un rango de $[0, 1]$ con incrementos de 0.2.

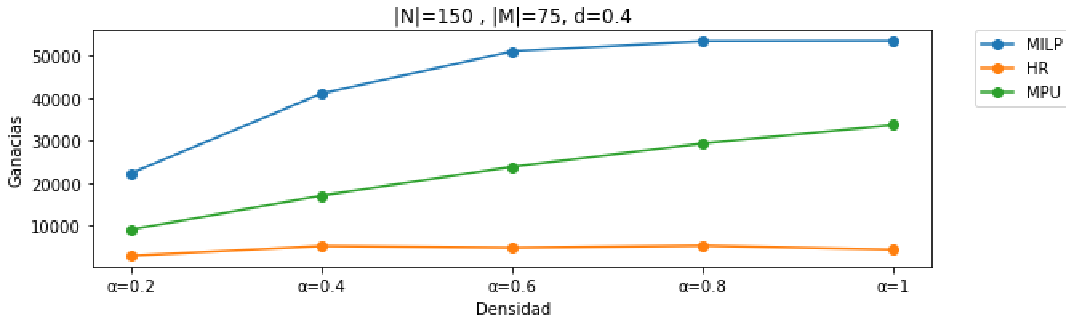


Figura 2.5: Ingresos promedio para la instancia $jNj = 150$ y $jMj = 75$ con densidad $d = 0.4$, variando el parametro de α.

La Figura 2.5 presenta el ingreso promedio para la instancia mencionada, con un límite de tiempo de 10 minutos para el MILP. A medida que el stock α aumenta, la diferencia entre los ingresos obtenidos por la Heurística Ratio y el MILP también se incrementa. Esto confirma la tendencia observada en instancias más pequeñas, donde la heurística es eficiente con un stock limitado e instancias pequeñas pero pierde eficiencia a medida que aumenta el stock y el tamaño de la instancia.

El MPU aumenta a medida que el stock α crece, demostrando ser consistentemente más eficiente que la HR. Además, dado que esta instancia contiene una gran cantidad de datos, el MPU tiene una amplia variedad de precios únicos entre los cuales puede seleccionar aquel que genere el mayor ingreso.

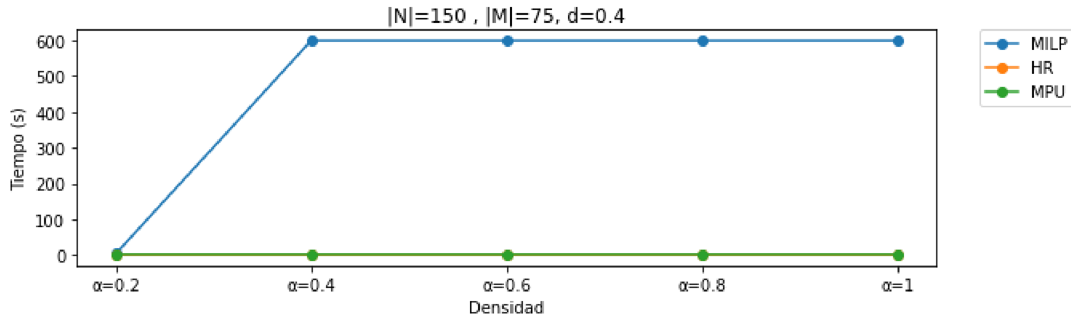


Figura 2.6: Tiempos promedio de ejecución para la instancia $jNj = 150$ y $jMj = 75$ con densidad $d = 0.4$, variando el stock α.

La Figura 2.6 presenta el tiempo promedio de ejecución de cada modelo para esta instancia. Se observa que el MILP logra obtener una solución óptima cuando el stock α es igual a 0.2, pero a medida que α aumenta, el tiempo de ejecución supera el límite de 10 minutos sin alcanzar una solución óptima. En cuanto al MPU y la HR, estos se ejecutan en fracción de segundos, destacando su rapidez.

El análisis confirma los resultados presentados en el estudio de Bucarey et al.[3], donde se señala que, en situaciones de inventario infinito, el MILP se vuelve ineficiente.

En el análisis, se examinará el GAP del MILP para evaluar la calidad de la solución proporcionada después de 10 minutos de ejecución.

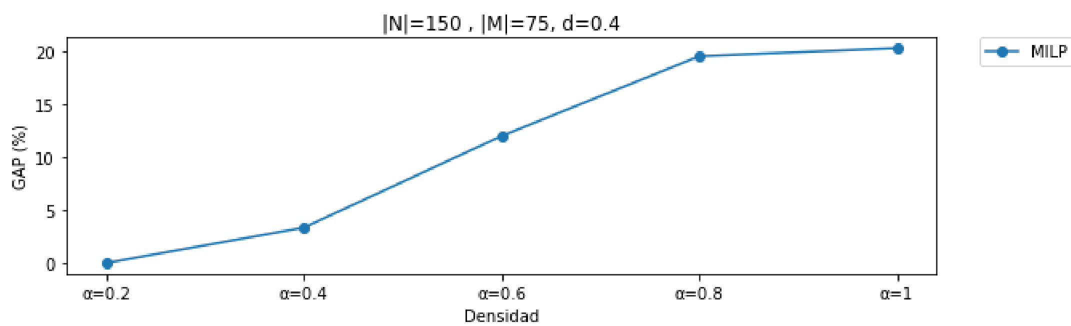


Figura 2.7: GAP para el MILP variando el parámetro α con limite de ejecución de 10 minutos.

La Figura 2.7 presenta el GAP del MILP, que indica la diferencia en porcentaje entre la solución del modelo y la solución óptima, considerando el límite de tiempo de ejecución de 10 minutos. El aumento del GAP con el incremento del stock α indica que el MILP es menos eficiente para encontrar soluciones cercanas al óptimo dentro del tiempo establecido. En la instancia específica, cuando el stock es $\alpha = 1$, el GAP es del 20 %, lo que indica que la solución obtenida por el MILP está a un 20 % de la solución óptima.

La información es valiosa para comprender las limitaciones del MILP en condiciones específicas y ayuda a tomar decisiones informadas sobre la elección de las estrategias según los requisitos de rapidez y eficiencia.

Al analizar los tiempos de ejecución presentados en la Figura 2.4, se llevó a cabo una ejecución de la misma instancia específica con un límite de tiempo de 2 segundos para el MILP. Esta elección permite visualizar las ganancias promedio obtenidas en ese tiempo. La elección de este límite se basa en el tiempo promedio que tardan las estrategias en ejecutarse.

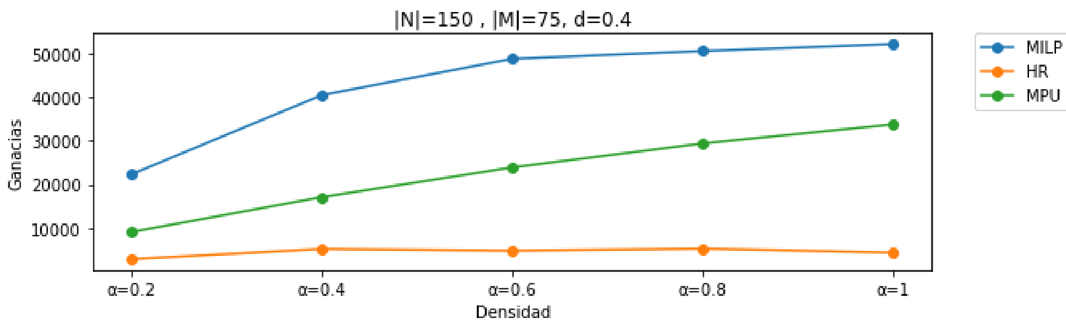


Figura 2.8: Ingresos promedio para la instancia $jNj = 150$ y $jMj = 75$ con densidad $d = 0.4$, variando el parámetro α, con un limite de tiempo de ejecución para el MILP de 2 segundos.

La Figura 2.8 revela que, al imponer una restricción en el tiempo de ejecución de 2 segundos para el MILP, este modelo logra proporcionar una solución eficiente que supera a las soluciones generadas por la HR y el MPU. Sin embargo, es importante destacar que las soluciones entregadas por el MILP tienen un GAP de hasta un 35 %, indicando que están hasta un 35 % por debajo de la solución óptima.

Instancia jNj=1500, jMj=75, d=0.4.

En el análisis de los modelos, se considerará una instancia más grande para evaluar tanto la rapidez como la eficiencia. Se ejecutarán con un límite de tiempo de 10 minutos, variando el parámetro de stock α en el rango de $[0, 1]$ con un paso de 0.2. Durante este proceso, se examinarán los ingresos generados y los tiempos de ejecución.

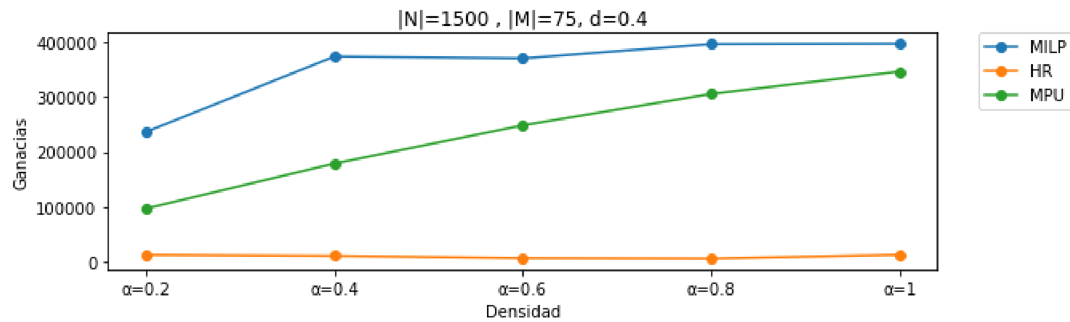


Figura 2.9: Ingresos promedio para la instancia $jNj = 1500$ y $jMj = 75$ con densidad $d = 0.4$, variando el α.

La Figura 2.9 muestra que los ingresos para esta instancia siguen un comportamiento similar a la instancia anterior $jNj = 150, jMj = 75, d = 0.4$. Aunque el MILP entrega una solución eficiente en comparación con el MPU y la HR, el GAP varía entre un 14 % y 80 %. El alto porcentaje sugiere que la solución del MILP no es de calidad y es distante de la solución óptima.

Además, la HR para esta instancia resulta ser ineficiente. Por otro lado, el MPU muestra resultados cada vez más convincentes a medida que aumenta el valor del stock α.

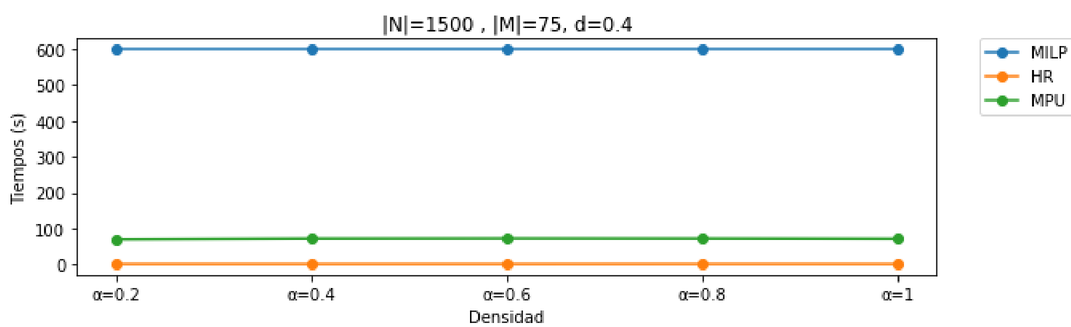


Figura 2.10: Tiempos promedio de ejecución para la instancia $jNj = 1500$ y $jMj = 75$ con densidad $d = 0.4$, variando el stock α.

En relación con los tiempos de ejecución, se observa en la Figura 2.10 que la HR es la más rápida para proporcionar una solución, independientemente del valor de α, aunque no resulta eficiente en términos de ingresos. En contraste, el MILP es el único modelo que requiere todo el tiempo asignado (10 minutos) para ofrecer una solución. En cuanto al MPU, este proporciona una solución razonable en comparación con los otros dos modelos en función del tiempo de ejecución.

Finalmente, se examinan las soluciones proporcionadas por el Modelo Lineal Entero Mixto

(MILP), la Heurística Ratio (HR) y el Método Precio Único (MPU) a los 3 segundos de ejecución para esta instancia. Este tiempo límite se estableció considerando que la HR tiene un tiempo de ejecución promedio de 3 segundos.

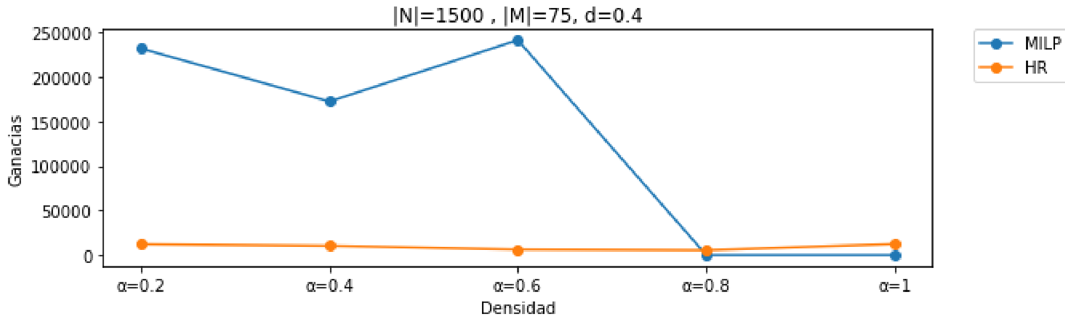


Figura 2.11: Ganancias promedio, con un tiempo limite de ejecución del MILP de 3 segundos, para la instancia $jNj = 1500$ y $jMj = 75$ con densidad $d = 0.4$, variando el parámetro α.

En la Figura 2.11, se evidencia que el Modelo Lineal Entero Mixto (MILP) no logra obtener una solución en 3 segundos cuando el stock α supera 0.8. En contraste, la Heurística Ratio (HR) proporciona una solución en ese lapso, aunque esta alejada de la óptima. Por otro lado, el Método Precio Único (MPU) no procesa todos los precios únicos en 3 segundos y, por lo tanto, no ofrece una solución en ese tiempo.

2.3.3. Conclusiones del Estudio Computacional

En el análisis comparativo de modelos para la fijación de precios en un caso *O ine*, se evaluaron el Modelo Lineal Entero Mixto (MILP), el Método Precio Único (MPU) y la Heurística Ratio (HR). Las principales conclusiones son:

Instancias Aleatorias:

La Heurística Ratio (HR) demostró un rendimiento eficiente cuando el inventario de productos era limitado, logrando capturar ingresos cercanos al óptimo. Sin embargo, su eficiencia disminuye a medida que α aumenta, ya que su enfoque en los clientes con mayor ratio limitó la base de clientes potenciales. En contraste, el Modelo Lineal Entero Mixto (MILP) se destacó como el más eficiente en términos de ingresos y rapidez.

Instancias basadas en Bucarey et al. [3]:

El Modelo de Optimización Entera Mixta (MILP), demostró ser eficiente y rápido para instancias con hasta 50 clientes y productos, logrando entregar una solución óptima en una fracción de segundo. Para instancias con 75 productos y 150 clientes, su rendimiento disminuyó, entregando soluciones con un GAP cercano a 20 % cuando se cubría toda la demanda. Finalmente, para la instancia 75 productos y 1500 clientes, el rendimiento del MILP se volvió ineficiente cuando se requiere una solución en fracciones de segundos, ya que el GAP de la solución entregada es cercano al 80 %. En cuanto al tiempo de ejecución para estas instancias grandes, el MILP se volvió ineficiente al no lograr soluciones óptimas en el límite de tiempo establecido, cuando aumenta el stock.

La Heurística Ratio (HR) fue rápida y eficiente para instancias pequeñas, logrando capturar ganancias similares al MILP en situaciones de inventario limitado. Sin embargo, en instancias más grandes, la HR fue rápida en proporcionar soluciones, pero estas estaban significativamente alejadas del óptimo.

El Método Precio Único (MPU) demostró estabilidad en términos de rapidez y eficiencia para diferentes tamaños de instancias. A medida que aumentó el tamaño de la instancia y el inventario, el MPU logró incrementar los ingresos. En términos de tiempos de ejecución, el MPU fue rápido hasta la instancia con 75 productos y 150 clientes, conservando tiempos reducidos de ejecución. Sin embargo, para la instancia con 75 productos y 1500 clientes, los tiempos de ejecución se elevaron a 70 segundos en promedio. Aunque estos tiempos son mayores en esta instancia en comparación con las otras, siguen siendo razonables, considerando la eficiencia global del modelo.

Capítulo 3

Caso Online

En este capítulo se explora el caso ***Online*** del PDPSMI. A diferencia del caso ***Offline***, los clientes llegan de forma secuencial, y cada uno se procesa individualmente en el momento de su llegada, sin conocimiento de los clientes futuros. El objetivo es encontrar estrategias de precios que generen el mayor ingreso, considerando la incertidumbre asociada con la secuencia de llegada de los clientes. Aunque se dispone de información sobre los presupuestos, los paquetes de los clientes y el stock de productos, la incertidumbre radica en la secuencia específica en la que los clientes ingresan.

En este contexto, se han desarrollado diferentes heurísticas que emplean estrategias especificas para optimizar la captura de ingresos a medida que los clientes llegan.

3.1. Precios No Adaptativos

En esta sección, se abordan los precios no adaptativos, los cuales son establecidos al inicio, es decir, antes de que llegue el primer cliente. Estos precios no pueden ser modificados o ajustados hasta el tiempo T, que corresponde a la llegada del último cliente. El objetivo es crear estrategias de precios, ya sea mediante el precio único o fijo, que maximicen los ingresos sin depender de la secuencia específica en la que llegan los clientes. A continuación, se presentan varias Heurísticas a las que denominaremos, Precio Único, Beta, Óptimos y Relajados.

3.1.1. Heurística Precio Único

La Heurística Precio Único (HPU), diseñada para abordar el caso *Online* con precios no adaptativos, se basa en considerar información completa sobre los presupuestos, los paquetes de los clientes y el stock de los productos. La estrategia empieza mediante el cálculo de una lista de candidatos de precios únicos, llamada PU. Los precios únicos se generan tomando en cuenta los presupuestos de los clientes y la cantidad de productos demandados por cada uno de ellos.

Luego, para cada precio de la lista PU, se ejecutan múltiples secuencias de llegada de clientes obteniendo los ingresos para cada una de ellas. En cada secuencia, los clientes son procesados secuencialmente, aplicando las restricciones de inventario y presupuesto con el precio único establecido.

Finalmente, para seleccionar el mejor precio único, se procede a calcular el promedio de los ingresos obtenidos para cada precio a lo largo de múltiples secuencias de llegada de clientes. Se elige el precio único que genere el mayor ingreso promedio posible.

A continuación, se presenta el pseudocódigo 3 para la HPU, donde se explicará su funcionamiento.

Algorithm 3 Realizar Compras con Secuencia

```
function RealizarComprasConSecuencia(clientes, productos, precios)
    Asignar precios a cada producto
    total = 0                                          ▷ Ganancias comienzan en 0.
    clientes_que_compraron = []                        ▷ Lista de clientes que compran.
    for cada cliente j en clientes do
        totalStock = Verdadero                         ▷ Verificar si hay stock.
        suma = 0                                       ▷ Ingreso para cada cliente.
        for cada i, item enumerar(j.indicePaquete) do
            if item es igual a 1 then
                suma += productos[i].precios           ▷ sumar precios
                if productos[i].stock es igual a 0 then    ▷ Verifica si hay stock.
                    totalStock = False
                    break
                end if
            end if
        end for
        if suma   j.presupuesto and totalStock then    ▷ Si alcanza presupuesto
            for cada i, item enumerar(j.indicePaquete) do    ▷ Hay stock
                if item == 1 then
                    productos[i].stock = productos[i].stock -= 1    ▷ Se actualiza el stock
                end if
            end for
            total += suma                              ▷ Se agrega cada suma del cliente j al total
            Agregar cliente a clientes_que_compraron
        end if
    end for
     devolver total, clientes_que_compraron
end function
     =0
```

El pseudocódigo presenta la función "*realizar_compras_con_secuencia*". Esta función primero asigna el precio a los productos y luego procesa cada cliente, verificando las restricciones de stock y presupuesto. Entregando el ingreso total y los clientes que compran.

Luego, el pseudocódigo 4 indica cómo aplicar la función "*realizar_compras_con_secuencia*" para diferentes secuencias de clientes.

Algorithm 4 Calcular Ingresos por Precio

PU como una lista vacía
for cada cliente j en Clientes **do**
    Agregar $(\frac{b^j}{|S^j|})$ a PU
end for
ingresos_por_precio = {precio: [] for precio in PU}
for para cada simulación **do**
    for precio en la lista PU **do**
        total_ganancias, clientes_que_compraron =
        realizar_compras_con_secuencia(secuencia_llegada, productos, precios)
        Agregar total_ganancias a ingresos_por_precio[precio]
    end for
end for

Se observa en el pseudocódigo 4 que calcula los precios candidatos a ser óptimos, guardándolos en la lista PU. Luego, para cada secuencia de cliente, se considera cada precio de la lista PU y se aplica la función "*realizar_compras_con_secuencia*", almacenando los ingresos para cada secuencia en el diccionario "*ingreso_por_precio*".

Ejemplo: Se presenta un ejemplo con una instancia pequeña para comprender mejor el funcionamiento de la HPU. Considerando la matriz de interés S, los presupuestos b de los clientes y el stock m de los productos.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = [571.83, 429.46, 578.51, 206.89, 813.51], m = [3, 2, 1, 5, 4]$$

Los precios únicos generados por la Heurística Precio Único (H.P.U) son los siguientes: $PU = [190.71, 107.36, 115.70, 68.96, 271.17]$. Dado que hay 5 clientes, se generan 120 secuencias de llegada distintas al considerar todas las combinaciones posibles. A continuación, se examina el comportamiento del ingreso para estas diversas secuencias de llegada de clientes, considerando los diferentes precios únicos.

Precio	Ingreso
\$271.17	\$813.51
\$190.61	\$1143.66
\$115.70	\$809.92
\$107.36	\$1006.54
\$68.96	\$586.19

Tabla 3.1: Precio único y el ingreso promedio generado para los 120 diferentes escenarios de llegada de clientes.

La Tabla 3.1, muestra el ingreso promedio para los 5 precios únicos. Para calcular el promedio se consideró los ingresos generados por las 120 secuencias de llegada de clientes para cada precio. En promedio el precio \$190.71 genera el ingreso más alto \$1143.66. Este precio es el mejor candidato a la hora de fijar precios para el ejemplo.

En la sección 3.1.5 se harán estudios computacionales de esta estrategia para analizar de manera mas precisa su eficiencia y rapidez.

3.1.2. Heurística Beta

El propósito de la Heurística Beta es determinar precios considerando la oferta y demanda de los productos. Para fijar los precios se considera el cociente entre la demanda d_i y la oferta m_i de productos como factor que indica si un producto es más demandado. Este cociente será multiplicado por el mayor presupuesto del cliente que demande dicho producto, obteniendo un vector de precios.

$$\frac{d_i}{m_i} \quad \max_{J:i2S^j} b^j \tag{3.1}$$

La expresión (3.1), generalmente entrega precios muy altos, por lo que en este caso se busca encontrar un valor β que genere la mejor asignación de precios para así poder obtener el mejor ingreso.

$$\frac{d_i}{m_i} \quad \max_{J:i2S^j} b^j \quad \beta \tag{3.2}$$

Con la expresión (3.2), se generan distintos vectores de precios para diversos valores de β. Estos vectores se analizarán en diferentes escenarios de llegada de clientes.

El siguiente pseudocódigo 5 muestra como obtener el mayor presupuesto del cliente que demanda dicho producto.

Algorithm 5 Cálculo del Máximo Presupuesto por Producto

for i en productos **do**
  max_budget 0
  for cada $cliente$ en clientes **do**
    if cliente.bundle[i] == 1 **then**
      max_budget máx($max\_budget, cliente.budget$)
    end if
  end for
  $max\_presupuesto[i]$ max_budget ▷ Guardar el máximo presupuesto
end for

En el pseudocódigo 5, para cada producto se obtiene el máximo presupuesto del cliente que demanda dicho producto y se guarda en la lista *max_presupuesto*. Luego, del pseudocódigo 6, obtiene el cociente entre demanda y oferta para cada producto.

Algorithm 6 Cálculo de la relación Demanda-Oferta por producto

$demanda\_productos$ [0] * longitud de *productos*
$relacion\_demanda\_oferta$ [0] * longitud de *productos*
for cada producto i en productos **do**
  for cada cliente j en clientes **do**
    if $j.bundleIndex[i]$ == 1 **then**
      $demanda\_productos[i]$ += 1 ▷ Demanda para cada producto
    end if
  end for
end for
$stock\_productos$ [$i.stock$ para cada producto en *productos*] ▷ Stock para cada producto
for cada producto i en productos **do**
  if $stock\_productos[i] \neq 0$ y $demanda\_productos[i] \neq 0$ **then**
    $relacion\_demanda\_oferta[i]$ $\frac{demanda\_productos[i]}{stock_productos[i]}$
  end if
end for
devolver $relacion\_demanda\_oferta$

Finalmente, en el pseudocódigo 7, una vez obtenido el cálculo del máximo presupuesto por producto y el cálculo del cociente entre demanda y oferta por producto, se genera el precio para cada β y se evalúa en las diferentes secuencias de llegada de clientes. Entregando a la función "*Realizar_compras_con_secuencia*", los vectores de precios generados por los diferentes β. Este algoritmo entrega las ganancias generadas para cada β.

Algorithm 7 Simulación de Ganancias para Distintas Permutaciones y Betas

for simulacion en num_simulaciones **do**
  secuencia_llegada   lista de clientes mezclada aleatoriamente
  ingresos_por_beta   fg
  ganancias_betha   fbetha: [] para cada betha en *bethas*g
  for betha en bethas **do**
    precios_finales   [relación   max_presupuesto[i]   betha for i, relación en enumerar(relaciones_demanda_oferta)]
    ingreso_total, clientes_compradores   realizar_compras_con_secuencia(secuencia_llegada, productos, precios_finales, secuencia_llegada)
    Agregar ingreso_total a ganancias_betha[betha]
  end for
  ganancias_por_simulacion[simulacion]   ganancias_betha[betha]
end for
devolver ganancias_por_simulacion

Después de llevar a cabo simulaciones con distintas secuencias de llegada de clientes para cada valor de β, se procede a calcular el promedio de las ganancias obtenidas para cada uno de ellos, considerando las diversas secuencias de llegada de clientes. Luego, se selecciona el vector de precios que genere el mayor ingreso posible. Esto implica identificar el β que resulte en el mayor promedio de ganancias.

Ejemplo: La Heurística Beta se aplicó a la misma instancia que se utilizó para la Heurística Precio Único (HPU).

$$\frac{d_i}{m_i} = [1.\bar{3}, 2, 3, 0.8, 0.75] \tag{3.3}$$

Una vez obtenidos los cocientes, la expresión (3.4) muestra el mayor presupuesto de los clientes que demandan cada producto:

$$\max_{J:i2S^j} b^j = [578.51, 813.51, 578.51, 813.51, 813.51] \tag{3.4}$$

En la Tabla 3.2 se observa cómo varían los precios e ingresos promedios variando el valor de β para los 120 escenarios.

β	Precio	Promedio
0.01	$[7.71, 16.27, 17.35, 6.50, 6.10]	$87.05
0.05	$[38.56, 81.35, 86.77, 32.54, 30.50]	$435.2
0.11	$[84.84, 178.97, 190.90, 71.58, 67.11]	$1067.55
0.018	**$[138.84, 292.86, 312.39, 117.14, 109.82]**	**$1088.21**
0.024	$[185.12, 390.48, 416.52, 156.19, 146.43]	$693.11

Tabla 3.2: Precio fijo generado por diferentes β y su ingreso promedio.

La Tabla 3.2, muestra que los valores de β afectan directamente a los precios y al ingreso promedio, donde se observa que para el valor de $\beta = 0.018$ se genera el mayor ingreso promedio de $1088.21.

3.1.3. Heurística Óptimos

La Heurística Óptimos se basa en utilizar el vector de precios obtenido mediante el Modelo Lineal Entero Mixto (MILP) del caso *O ine*. Posteriormente, se aplica la función "*realizar_compras_con_secuencia*" para evaluar el ingreso de las diferentes secuencias de llegada de clientes, calculando un ingreso promedio.

Ejemplo: La Heurística Óptimos se aplico para la misma instancia que se utilizó en la evaluación de la Heurística Precio Único (H.P.U). El vector de precios resultante fue $P = \$[0, 0, 571.83, 0, 429.45]$, generando un ingreso promedio de $1430.75 a lo largo de 120 secuencias de llegada de clientes.

3.1.4. Heurística Relajados

En la Heurística Relajados, se adopta una perspectiva que parte de la relajación lineal del Modelo Lineal Entero Mixto (MILP) del caso *O ine*. En esta versión, la variable x_j ya no es binaria, sino continua. Una vez obtenido este vector de precios, se procede a aplicar la función "*realizar_compras_con_secuencia*". De esta manera, se evalúa el vector de precios en distintas secuencias de llegada de clientes, calculando un ingreso promedio.

Ejemplo: La Heurística Relajados se aplicó para la misma instancia que se utilizó en la evaluación de la Heurística Precio Único (HPU) El vector de precios obtenido es $P = \$[0, 813.51, 557.96, 0, 0]$. Al evaluar este vector en 120 secuencias de llegada de clientes, se obtuvo un ingreso promedio de $1382.63. $P = \$[0, 813.51, 557.96, 0, 0]$

En la siguiente sección 3.1.5, se estudiarán todas las heurísticas desarrolladas en precios no adaptativos.

3.1.5. Estudio Computacional para Precios No Adaptativos

En esta sección, se llevará a cabo un análisis comparativo y explicativo sobre el comportamiento de las fijaciones de precios para las diferentes heurísticas.

Instancias Aleatorias

Al evaluar la instancia dada por (3.5), se generaron los siguientes gráficos para la Heurística Precio Único y la Heurística Beta. Se tuvieron en cuenta un total de 120 escenarios de llegada de clientes para esta instancia.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = [571.83, 429.46, 578.51, 206.89, 813.51], m = [3, 2, 1, 5, 4] \quad (3.5)$$

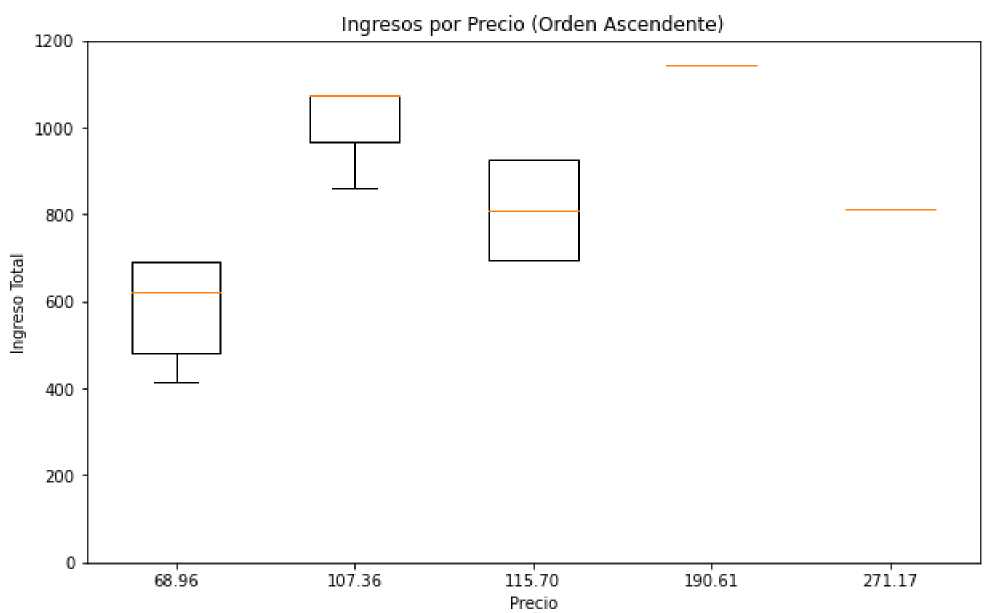


Figura 3.1: Variación del ingreso para diferentes escenarios para precios únicos

La Figura 3.1 muestra la variación del ingreso para diferentes escenarios con precios únicos. Se observa que el precio \$190.61 genera el mayor ingreso de \$1143.66. Sin embargo, surge la pregunta. ¿Por qué, independientemente de la secuencia de llegada, el ingreso siempre se mantiene constante para este precio, resultando en que el promedio sea igual a la esperanza?. Asimismo, surge otra pregunta. ¿Por qué algunos precios, aunque no generan el ingreso máximo, sí producen un promedio igual a la esperanza?.

Asignando el precio de \$190.61 a todos los productos, solo los clientes 1 y 5 pueden realizar compras debido a sus presupuestos. Sin embargo, al considerar el stock limitado de los productos 2 y 3 y el orden de llegada, los clientes 1, 3 y 4 no pueden comprar simultáneamente, ya que todos demandan el producto 3 y solo hay una unidad disponible. Lo mismo ocurre con el producto 2, que tiene solo dos unidades disponibles. En respuesta a la primera pregunta, el ingreso generado siempre es el mismo, independientemente de la secuencia de llegada de los clientes, ya que solo los clientes 1 y 5 pueden comprar según la restricción de presupuesto.

En relación a la segunda pregunta, el precio de \$271.17 mantiene un ingreso constante en todos los escenarios debido a que supera el precio óptimo que genera el mayor ingreso. Esto restringe la cantidad de clientes capaces de realizar compras, limitándose a aquellos con presupuestos más elevados, como el cliente 5. La falta de diversidad en los clientes que pueden comprar a este precio resulta en un ingreso constante, sin importar la secuencia específica de llegada de los clientes.

El ingreso generado por los otros precios depende de la secuencia de llegada de clientes y está sujeto a la disponibilidad de productos para aquellos que desean comprar. Tomando el ejemplo del precio de \$68.96, todos los clientes tienen presupuestos suficientes para comprar a este precio. Sin embargo, la variabilidad en el ingreso proviene de la influencia de la disponibilidad de productos, ya que el orden en que llegan los clientes afecta quiénes pueden realizar compras primero. Por lo tanto, el ingreso variará según el orden específico de llegada de los clientes.

Ahora, se analizará la misma instancia, pero utilizando la Heurística Beta, variando el valor de Beta.

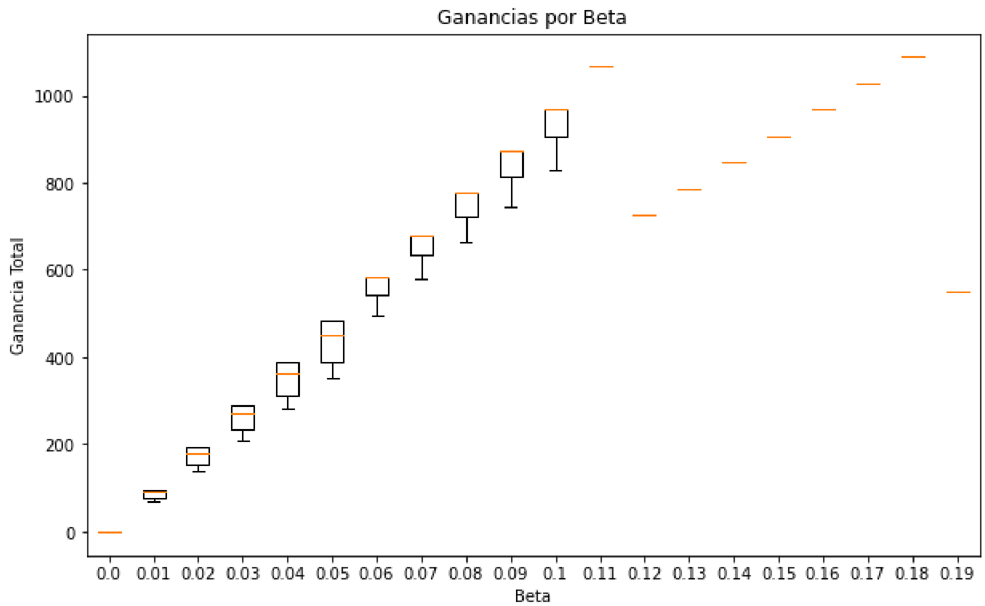


Figura 3.2: Variación del ingreso para diferentes escenarios, variando Beta

Se observa en la Figura 3.2 que al variar el parámetro β, se generan distintos vectores de precios que afectan el ingreso en función de la secuencia de llegada de los clientes.

Para el valor de $\beta = 0.05$, el vector de precio generado es $\$[38.56, 81.35, 86.77, 32.54, 30.50]$. En este caso, el ingreso varía según la llegada de los clientes, ya que todos pueden comprar por presupuesto, pero el orden de llegada influye debido a la limitación en la disponibilidad de productos.

Cuando $\beta = 0.11$, el vector de precios generado es $\$[84.84, 178.97, 190.90, 71.58, 67.11]$. En esta configuración, los clientes los 1, 2 y 5 tienen la capacidad tanto presupuestaria como de stock para realizar compras. Esto da como resultado un ingreso constante, ya que estos clientes pueden comprar independientemente del orden en que lleguen.

A medida que el valor de β aumenta en el rango $[0.12, 0.18]$, solo los clientes 1 y 5 pueden comprar debido a las restricciones de presupuesto. Para $\beta = 0.18$, se alcanza el máximo ingreso de \$1088.21. Después de este β, solo el cliente 5 puede comprar. Al aumentar más el valor de β el ingreso resultante es \$0, ya que no puede comprar ningún cliente.

Ambas estrategias de fijación de precios generan ingresos superiores a \$1000. Aunque en algunos casos la Heurística Precio Único genera un mayor ingreso que la Heurística Beta, esta diferencia depende netamente de los datos de cada instancia. En algunos escenarios, la Heurística Beta supera a la Heurística Precio Único.

Para esta instancia, los ingresos generados por la Heurística Óptimos y Relajados fueron de \$1430.75 y \$1382.63 respectivamente.

Se analizara otra instancia (3.6):

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, b = [88.21, 584.22, 398.35, 914.75, 614.87], m = [5, 2, 3, 3, 2] \tag{3.6}$$

A continuación, la Figura 3.3, muestra los ingresos generados utilizando la Heurística Precio Único.

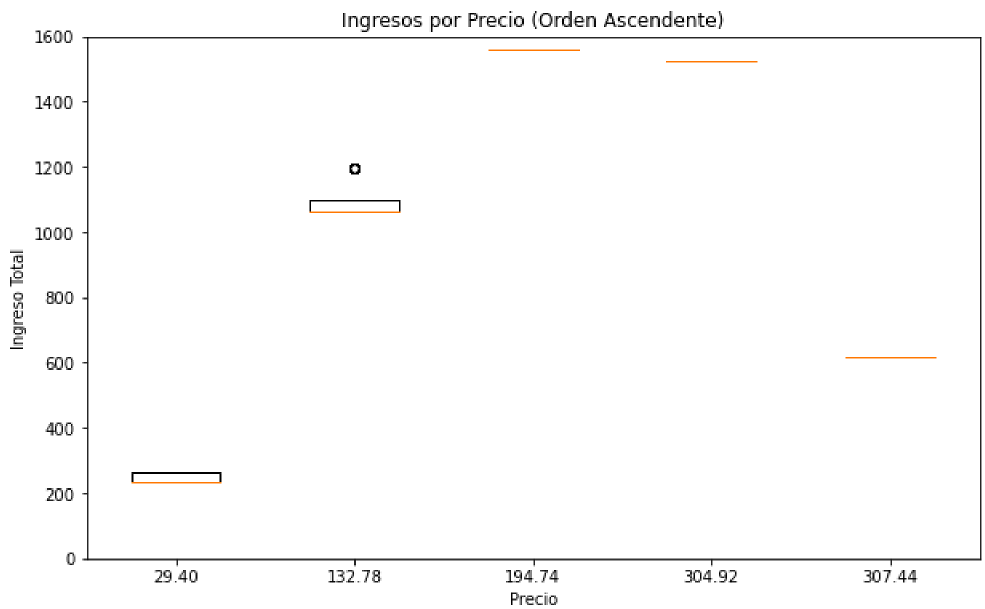


Figura 3.3: Variación del ingreso para diferentes escenarios para la Heurística Precio Único

Para esta instancia, el mayor ingreso obtenido es de \$1557.92 generado por el precio \$194.74. Con este precio, los únicos clientes que pueden realizar compras son los clientes 2, 4 y 5. Independiente de la secuencia de llegada, estos clientes siempre comprarán, generando un ingreso constante. De manera similar, los precios de \$304.92 y \$307.44 generan ingresos constantes de \$1524.58 y \$614.87, respectivamente, ya que solo los clientes 4 y 5, y el cliente 5 pueden comprar a esos precios. También se observa que, para los demás precios, los ingresos varían dependiendo de la secuencia de llegada de los clientes.

Ahora, se analizará la misma instancia pero utilizando la Heurística Beta para diferentes valores de β

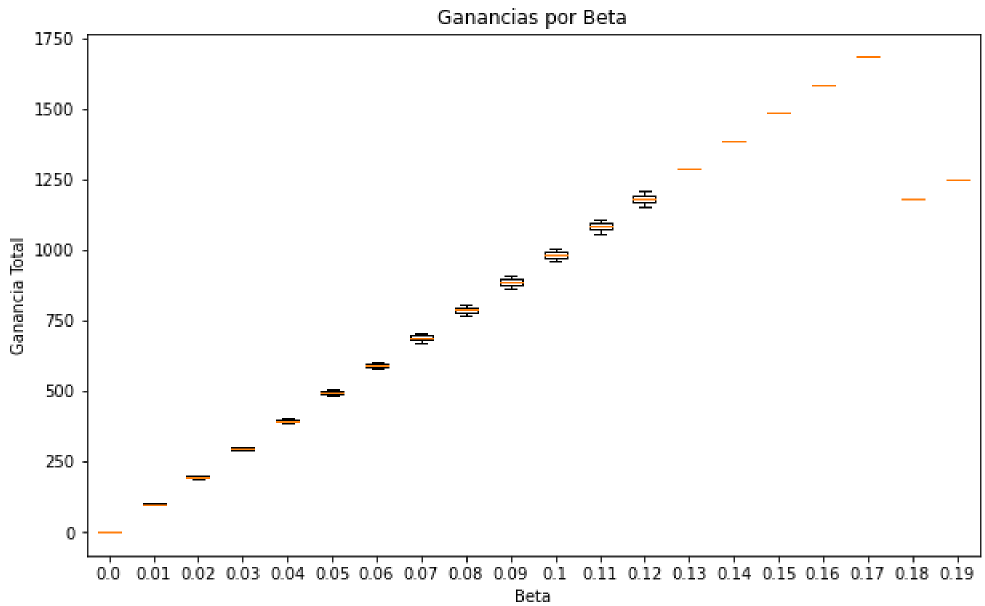


Figura 3.4: Variación del ingreso para diferentes escenarios, variando Beta.

La Heurística Beta con un vector de precios $[27.09, 77.75, 259.18, 259.18, 49.66]$, generado con $\beta = 0.17$, logra alcanzar el ingreso máximo de \$1682.49. También, se observa que, a partir de $\beta = 0.13$, los ingresos son constantes independientemente de la secuencia de llegada de los clientes.

Para esta instancia, los ingresos generados por la Heurística Óptimos y Relajados son de \$2083.19 y \$1529.62 respectivamente.

Al realizar este análisis comparativo y explicativo sobre las diferentes heurísticas para las dos instancias consideradas, se pudieron hacer las siguientes observaciones: para la Heurística Precio Único, se notó que, para el precio máximo, el ingreso es constante, independiente de la secuencia de llegada de los clientes. Este ingreso siempre será igual al presupuesto del cliente que determina este precio. Lo mismo ocurre con el conjunto de clientes que compran.

Las observaciones realizadas conducen a la formulación de la siguiente propiedad y conjeturas para la Heurística Precio Único:

Propiedad: Si el precio p queda determinado por el mayor cociente entre el presupuesto del cliente j y la cantidad de productos del paquete $jS^j j$ del mismo cliente, entonces el ingreso ($\mathrm{Rev}_p\ (\sigma)$) generado para el precio p , será constante, independiente de la secuencia de llegada (σ). Este ingreso siempre será igual al presupuesto del cliente b^j , donde j es el cliente con el máximo cociente $\frac{b^j}{jS^j j}$.

A continuación, se presenta la formulación matemática:

$$\text{Si:} \quad p \; = \max_{j \in J} \frac{b^j}{|S^j|}$$

$$\text{Entonces:} \quad \operatorname*{Rev}_{p}(\sigma) = b^j \;, \quad \forall\sigma; \quad \text{donde:} \quad j \; = \operatorname*{argmax}_{j \in J} \frac{b^j}{|S^j|}$$

Demostración Propiedad:

Supongamos que existe una secuencia de llegada σ_1, en la cual se vende al cliente $j' \neq j$, al precio p .

Entonces:

$$b^{j'} \quad |S^{j'}| \; p \implies p \quad \frac{b^{j'}}{|S^{j'}|}$$

Esta afirmación indica que, si se vende al cliente j' al precio p , su presupuesto $b^{j'}$ debe ser mayor o igual a la cantidad de productos $|S^{j'}|$ multiplicado por el precio p . No obstante, al despejar el precio p , se obtiene que este precio es menor o igual a $\frac{b^{j'}}{|S^{j'}|}$. Esta condición resulta ser falsa, ya que el precio p es el máximo precio y no puede haber otro mayor. En consecuencia, se llega a una contradicción, Para que la afirmación inicial sea cierta, es necesario que el cliente $j' = j$.

Conjetura 1: Si existe un precio $p < p$ tal que el ingreso $\text{Rev}_p(\sigma)$ es constante para cualquier orden de llegada σ, entonces existe un precio $p' > p$ que genera un ingreso constante $\text{Rev}_{p'}(\sigma)$ para cualquier orden de llegada. Es decir, si desde un precio $p < p$ los ingreso $\text{Rev}_p(\sigma)$ son constantes para cualquier secuencia de llegada de clientes, entonces el precio $p' > p$ también tiene un ingreso constante para cualquier secuencia de llegada.

La formulación matemática es la siguiente:

$$\text{Si:} \quad \exists\, p < p \;\text{ tal que }\; \operatorname*{Rev}_{p}(\sigma) \text{ es constante } \forall\, \sigma$$

$$\text{Entonces:} \quad \operatorname*{Rev}_{p'}(\sigma) \text{ es constante } \forall\, \sigma \text{ con } p' > p$$

Conjetura 2: Si existe un precio $p < p$ tal que el conjunto de clientes que compra C_p es constante para cualquier orden de llegada σ, entonces existe un precio $p' > p$ que genera un conjunto de clientes constante $C_{p'}$ para cualquier orden de llegada.

La formulación matemática es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Si:} \quad & \exists\, p < p \ \text{ tal que } C_p \text{ es constante } \forall\, \sigma \\ \text{Entonces:} \quad & C_{p'} \text{ es constante } \forall\, \sigma \text{ con } p' > p \end{aligned}$$

3.1.6. Instancias utilizadas en Bucarey et al. [3]

Este estudio evaluará la eficiencia y rapidez de las heurísticas propuestas para las fijaciones de precios no adaptativos. Se utilizaran instancias proporcionadas por la investigación de referencia [3], abordando todas las combinaciones para las instancias de 25 y 50 clientes y productos. El presupuesto de los clientes varía entre 1 y 1000. Además, se considerará la densidad de la matriz de interés S que contiene los paquetes de todos los clientes. La densidad se define como la suma de la demanda de todos los clientes dividido entre cantidad de clientes y productos. Es decir,

$$d := \frac{\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} S_i^j}{|M| \, |N|} \tag{3.7}$$

La densidad será explorada en los niveles $d = [0.1, 0.2, 0.4]$. Para establecer el stock de los producto, se utilizará la fórmula:

$$m_i = \alpha \sum_{j \in N} S_i^j, \tag{3.8}$$

donde, el valor de α determina la cantidad de productos que se tienen de stock en función de la demanda total. Se considerarán los mismos parámetros para α que para d. Cada combinación será evaluada en 10 instancias. Con el objetivo de medir tanto la eficiencia como la rapidez de cada heurística, se analizarán 1000 secuencias de llegada de clientes generadas aleatoriamente, asegurándose de que cada secuencia sea única y sin repeticiones

En la Heurística Precio Único, se calcularon los ingresos para cada combinación de clientes y productos en las 10 instancias. Se obtuvo el ingreso promedio para cada precio, calculando el promedio de las 1000 permutaciones de clientes. Luego, se seleccionó el precio que generó el mejor ingreso promedio para cada instancia y se calculó un ingreso promedio total.

En la Heurística Beta, para cada combinación de clientes, productos y para las 10 instancias, se obtuvo el ingreso promedio para cada valor de Beta. Luego, se seleccionó el Beta que generó el mejor ingreso promedio para cada instancia y se obtuvo un ingreso promedio total.

En cuanto a las Heurísticas Óptimos y Relajados, estas solo proporcionan un vector de precios, por lo que se obtuvo el ingreso promedio para este vector entre las 1000 secuencias de llegada de clientes para cada simulación y combinación de clientes y productos.

Este proceso se llevó a cabo para diferentes densidades d para la matriz de interés S y el stock m. Los resultados se presentan en la siguiente Figura 3.5.

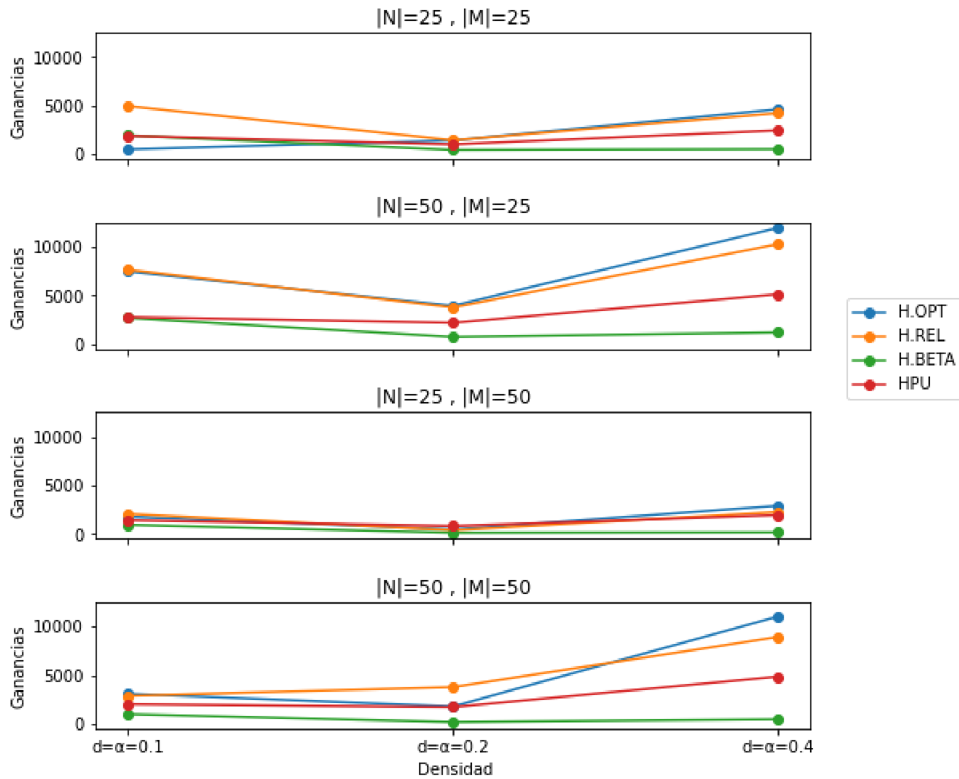


Figura 3.5: Ingresos promedio en función de distintas densidades de los parámetros de α y d para los diferentes algoritmos.

La Figura 3.5, muestra que las Heurísticas Óptimos y Relajados son las más eficientes en términos de ingresos, especialmente en instancias con $jNj = 50, jMj = 25$ y $jNj = 50, jMj = 50$. Esto se atribuye a que estas heurísticas usan los precios obtenidos por el MILP y MILP Relajado, respectivamente. La estabilidad y eficiencia de estas heurísticas se demuestran al lograr mayores ingresos en varias permutaciones de clientes.

En contraste, la Heurística Beta muestra menor eficiencia y estabilidad, independiente de la densidad de la matriz S y el stock. La variabilidad en los ingresos se atribuye a la dependencia de los datos específicos de cada instancia, lo que la hace menos estable.

Se observa también que, en general, los ingresos promedios disminuyen cuando la densidad de la matriz de interés y la densidad del stock es $d = \alpha = 0.2$. Esto se debe a que, cuando la densidad de la matriz aumenta de 0.1 a 0.2, la cantidad de productos en la matriz se duplica, pero el stock en general no aumenta significativamente al pasar de un stock con $\alpha = 0.1$ a $\alpha = 0.2$. Esto resulta en un aumento de la demanda de productos, pero el stock se mantiene, lo que conlleva a una disminución de las ventas.

La Heurística Precio Único, muestra ingresos estables y que en general aumentan a medida que la densidad de la matriz se incrementa. Sin embargo, sus ingresos son menores que los de las Heurísticas Óptimos y Relajados.

En cuanto a los tiempos de ejecución, las heurísticas se demoran entre 1 y 5 minutos aproximadamente en entregar una solución, dependiendo del tamaño de la instancia. Estos resultados fueron obtenidos ejecutando las heurísticas en un mismo código y utilizando las mismas secuencias de llegada para garantizar una comparación justa. Es importante destacar que los tiempos de ejecución proporcionan información para medir la eficiencia computacional.

3.1.7. Conclusiones del Estudio Computacional

Tras analizar las soluciones obtenidas por las heurísticas y los tiempos de ejecución, se observa que las heurísticas logran un equilibrio entre eficiencia y rapidez. La Heurística Óptimos y Relajados destacan como las mejores candidatas para aplicar en contextos de precios no adaptativos, ya que obtienen el mayor ingreso promedio en las diferentes instancias analizadas. Cabe destacar que todas las heurísticas tienen tiempos de ejecución que no sobrepasan los 5 minutos aproximadamente.

3.2. Precios Adaptativos

Los precios adaptativos se refieren a estrategias donde los precios se ajustan a lo largo del horizonte de venta en función de diversos factores, como la oferta y demanda, las condiciones del mercado y otros elementos relevantes. El propósito principal de esta táctica es encontrar un equilibrio estratégico que permita variar o mantener los precios según el diseño de la estrategia, con el objetivo fundamental de maximizar las ganancias.

Estas estrategias se aplican en diversas industrias, como aerolíneas, comercios minoristas en línea, hotelería, mercados financieros, entre otras. Bajo este enfoque de fijación de precios, en cada periodo de tiempo t, llega un cliente y no se tiene la certeza de que cliente llegará primero. Para esta estrategia, se asume la presencia de información completa, al igual que en los precios no adaptativos.

La finalidad de esta estrategia radica en maximizar los ingresos y la rentabilidad al alinear los precios con las cambiantes condiciones del mercado. En los próximos apartados, se explorarán tres estrategias específicas de fijación de precios que se inscriben dentro de este caso.

3.2.1. Heurística Cocientes Adaptativos (HCA)

Esta estrategia se basa en la consideración de la oferta y la demanda de cada producto, así como también el precio único generado por cada cliente. En cada periodo de tiempo, se calcula el precio de los 19productos mediante el cociente entre la demanda y oferta. Si este resultado es mayor que 1, se multiplica por el menor precio único obtenido por los clientes, teniendo como cota superior, el mayor precio único. En caso contrario, si el cociente es menor que 1, se multiplica por el mayor precio único. Si el cociente es igual a 1, se multiplica por el promedio de los precios únicos.

A medida que transcurre el tiempo, se procesa de a un cliente a la vez. El conjunto de clientes se actualiza, excluyendo a los clientes que ya han llegado en tiempos pasados, se actualiza el stock m_{it} y la demanda de los productos d_{it}.

Las expresiones que rigen esta fijación de precios que involucran el precio único generado para cada cliente (p^u_j) que serán agregados a la lista PU, el cociente entre la demanda y la oferta (C_{it}), y el promedio de los precios únicos ($\bar{p}^u_{j\,t}$), formuladas de la siguiente manera:

$$p^u_j = \frac{b^j}{|S^j|} \quad \forall j \in N \tag{3.9}$$

$$C_{it} = \frac{d_{it}}{m_{it}} \quad \forall t \in T, \forall i \in I \tag{3.10}$$

$$\bar{p}^u_{j\,t} = \frac{\sum_{j \in N} p^u_j}{|N|} \quad \forall t \in T \tag{3.11}$$

En la formulación, los precios únicos p^u_j pertenecen a la lista PU, la cual se ajusta a medida que el tiempo pasa. Los elementos como b^j representan el presupuesto del cliente j, $|S^j|$ indica la cantidad de productos que desea el cliente j, $\bar{p}^u_{j\,t}$ es el promedio de los precios únicos, y C_{it} es el cociente para cada producto i en el tiempo t, relacionado con la demanda y la oferta (d_{it} y m_{it} respectivamente).

Luego, la expresión (3.12) calcula el precio considerando estos factores, proporcionando una metodología dinámica que se adapta a las variaciones en la demanda, el stock y los presupuestos a lo largo del tiempo.

$$p_{it} = \begin{cases} \min \left\{ \max\limits_{p^u \in PU}(p_j^u), \min\limits_{p_j^u \in PU}(p_j^u) \quad C_{it} \right\} & \text{si } C_{it} > 1 \\ \bar{p_j^u}_t & \text{si } C_{it} = 1 \\ \max\limits_{p^u \in PU}(p_j^u) \quad C_{it} & \text{si } C_{it} < 1 \end{cases} \tag{3.12}$$

A continuación se presenta el algoritmo 8 de la Heurística Cocientes Adaptativos:

Algorithm 8 Algoritmo Cocientes Dinámicos Adaptativos

for cada tiempo t en T **do**
  for cada cliente j en J **do**
    Calcular precio único p^u como $\frac{b^j}{|S^j|}$, donde b^j es el presupuesto del cliente y $|S^j|$ es la cantidad de productos que desea.
  end for
  for cada producto i en I **do**
    Calcular cociente C_{it} como $\frac{d_{it}}{m_{it}}$, donde d_{it} es la demanda y m_{it} es la oferta del producto i para el tiempo t.
    Calcular precio p_{it} según:
    if $C_{it} > 1$ **then**
      $p_{it} = \min\{\max(p_j^u), \min(p_j^u) \quad C_{it}\}$
    else if $C_{it} = 1$ **then**
      $p_{it} = \bar{p_j^u} \quad C_{it}$
    else if $C_{it} < 1$ **then**
      $p_{it} = \max(p_j^u) \quad C_{it}$
    end if
    Verificar si cumple con la restricción de stock y presupuesto el cliente
    Actualizar demanda d_{it} y oferta m_{it} del producto i para el tiempo t.
  end for
end for

El algoritmo 8, muestra la determinación de precios para cada tiempo mediante las formulaciones (3.9), (3.10), (3.11) y (3.12). Posteriormente, en cada periodo de tiempo, se verifica si el cliente recién llegado satisface las restricciones de stock y presupuesto. Es importante señalar que, en cada iteración temporal, se realiza una actualización que abarca el stock, la demanda, la oferta de productos y el conjunto de clientes. El proceso garantiza una adaptación continua y dinámica del sistema a lo largo del tiempo.

Ejemplo: Se analizara la instancia (3.13), para observar los precios asignados y las ganancias.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = [571.83, 429.46, 578.51, 206.89, 813.51], m = [3, 2, 1, 5, 4] \quad (3.13)$$

Si se considera como ejemplo la secuencia de llegada de clientes $[5, 3, 1, 2, 4]$, la asignación de precios para cada tiempo se detalla a continuación:

1. Tiempo 1: Llega cliente 5. Con una demanda para cada producto de $d_{i1} = [4, 4, 3, 4, 3]$ y un stock de $m_{i1} = [3, 2, 1, 5, 4]$, el cociente para cada producto en este tiempo es: $C_{i1} = [1.\bar{3}, 2, 3, 0.8, 0.75]$. Los precios únicos obtenidos de cada cliente son: $PU = f190.61, 107.36, 115.70, 68.96, 271.17g$. Ahora, se aplica la expresión (3.12), y el vector de precios es: $p_{i1} = [91.95, 137.93, 206.89, 216.94, 203.38]$.

   Se observa que el precio del producto 1 en el Tiempo 1, denotado como p_{11}, es de \$91.95. El valor se obtiene a partir del cociente $C_{11} = 1.\bar{3}$, el cual supera el valor de 1. Dado que es mayor que 1, se multiplica por el precio mínimo p^u generado en ese tiempo, en este caso es \$68.96. El proceso se repite para los demás precios en el tiempo inicial.

   El cliente 5 compra, generando una ganancias de \$558.24, el stock se actualiza descontando una unidad de los productos demandados por el cliente 5 y también se actualiza la demanda para el siguiente tiempo.

2. Tiempo 2: Llega cliente 3. El precio se fija antes de llegar el cliente 3, solo se consideran los clientes que aún no han llegado, es decir, $[3, 2, 1, 4]$. Dado que en el Tiempo 1 el cliente 5 compro, el nuevo stock es: $m_{i2} = [3, 1, 1, 4, 3]$, la demanda es: $d_{i2} = [4, 3, 3, 3, 2]$, por lo que el cociente en este tiempo es de: $C_{i2} = [1.\bar{3}, 3, 3, 0.75, 0.\bar{6}]$. Además, la lista de precios únicos p^u 2 PU se reduce ya que se excluyen los clientes que ya llegaron. La nueva lista de PU es $f190.61, 107.36, 115.70, 68.96g$. El vector de precios para este tiempo queda como $p_{i2} = [91.95, 190.61, 190.61, 142.96, 127.07]$. El cliente 3 no compra en este tiempo ya que el valor del paquete supera su presupuesto.

3. Tiempo 3: Llega el cliente 1. Para este tiempo, como en el anterior no compro el cliente 3, el stock se mantiene, pero de igual forma se actualiza la demanda, quedando con los siguientes valores: $d_{i3} = [3, 2, 2, 2, 1]$, el cociente de cada producto es: $C_{i3} = [1, 2, 2, 0.5, 0.\bar{3}]$. Además, se actualiza la lista de precios únicos PU ya que se excluye el cliente 3, quedando $PU = f190.61, 107.36, 68.96g$. Con esto, el vector de precios p_{i3} para este tiempo es: $p_{i3} = [122.31, 137.92, 137.92, 95.31, 63.54]$. El cliente 3 compra, generando una ganancia de \$355.54.

4. Tiempo 4: Llega cliente 2. Se actualiza el stock: $m_{i4} = [2, 1, 0, 3, 3]$, la demanda: $d_{i4} = [2, 2, 1, 1, 1]$ y el cociente de cada producto: $C_{i4} = [1, 2, 0, 0.\bar{3}, 0.\bar{3}]$, así como

también la lista de precios únicos $PU = \{107.36, 68.96\}$. Generando un precio de $p_{i4} = [88.16, 107.36, 0.0, 35.79, 35.79]$. El cliente 2 compra, obteniendo un ingreso de \$267.10.

5. Tiempo 5: Llega cliente 4. Finalmente, para este tiempo se actualiza el stock $m_{i5} = [1, 0, 0, 2, 2]$, la demanda: $d_{i5} = [1, 1, 1, 0, 0]$, el cociente es: $C_{i5} = [1, 0, 0, 0, 0]$ y la lista de precios únicos es $PU = \{68.96\}$. Se obtiene el vector de precios $p_{i5} = [68.96, 0, 0, 0, 0]$. Este cliente no pudo comprar por falta de stock en productos demandados.

Para la instancia el ingreso total fue de \$1180.88 comprando los clientes 5, 1 y 2.

En la sección 3.2.4 se harán estudios computacionales de esta estrategia para analizar de manera mas precisa su eficiencia y rapidez.

3.2.2. Heurística MILP Adaptativo (HMA)

En esta sección se presenta una heurística en la que el vector de precios p_t se calcula para cada tiempo utilizando el Modelo Lineal Entero Mixto (MILP) del caso *Offline*.

En el tiempo inicial, se consideran todos los clientes, un stock inicial, y el MILP proporciona el vector de precios p_t para cuando llegue el primer cliente. Luego, al llegar cada cliente, se verifica si cumple con las restricciones de stock y presupuesto. Si es afirmativo, se realiza la venta, se actualiza el stock para el siguiente tiempo y se excluye al cliente que llegó para recalcular el vector de precios mediante el MILP. El proceso se repite para cada cliente que llega, adaptando dinámicamente los precios.

Ejemplo: Se consideró la misma instancia que se utilizó en la HCA. Utilizando como ejemplo la secuencia de llegada de clientes $[5, 3, 1, 2, 4]$, se procedió a analizar la asignación de precios para cada tiempo.

1. Tiempo 1: Para obtener el vector de precios, se consideran todos los clientes y un stock inicial de $m_{i1} = [3, 2, 1, 5, 4]$. El vector de precios obtenido por el MILP es $p_{i1} = [68.96, 68.96, 280.29, 222.57, 521.97]$. En este tiempo llega el cliente 5, quien cumple con las restricciones de stock y presupuesto, por lo que realiza la compra generando un ingreso de \$813.51. Se actualiza el stock para el siguiente tiempo y se excluye al cliente.

2. Tiempo 2: Para obtener el vector de precios en este tiempo, se excluye al cliente 5 y se entrega el stock actualizado $m_{i2} = [3, 1, 1, 4, 3]$ al MILP. Este proporciona el siguiente vector de precios: $p_{i2} = [68.96, 68.96, 433.90, 68.96, 222.57]$. El cliente 3 no puede comprar ya que el presupuesto no le es suficiente.

3. Tiempo 3: En este tiempo se excluyen los clientes 5 y 3, considerando un stock de: $m_{i3} = [3, 1, 1, 4, 3]$, este es el mismo stock que en el Tiempo 2, ya que el cliente 3 no realizó la compra en ese momento. El MILP arroja el vector de precios $p_{i3} = [68.96, 68.96, 280.29, 222.57, 68.96]$. El cliente 1 realiza la compra, generando una ganancia de \$571.82.

4. Tiempo 4: Se actualiza el stock, ya que en el tiempo anterior el cliente 1 compró. El stock actualizado es: $m_{i4} = [2, 1, 0, 3, 3]$. Los clientes que se consideran para obtener el vector de precios son el 2 y 4. El MILP arroja el vector de precios: $p_{i4} = [68.96, 68.96, 68.96, 68.96, 222.57]$. El cliente 2 realiza la compra, entregando una ganancia de \$429.45.

5. Tiempo 5: Finalmente, para este tiempo, se actualiza el stock y se considera solo al cliente 4, con un stock de: $m_{i5} = [1, 0, 0, 2, 2]$. El MILP arroja el vector de precios: $p_{i5} = [68.96, 68.96, 68.96, 16270.2, 16270.2]$. Como se puede observar, independiente los precios asignados por el MILP, el cliente 4 no podrá comprar, ya que no hay stock de los productos demandados.

Para la instancia el ingreso total fue de \$1814.80 comprando los clientes 5, 1 y 2.

En la sección 3.2.4 se harán estudios computacionales de esta heurística para analizar de manera mas precisa su eficiencia y rapidez.

3.2.3. Heurística Precio Único Adaptativo (HPUA)

En esta sección se presenta una heurística que emplea precios únicos, representados como p^u, generados por los clientes. En cada periodo, se establece un único precio para todos los productos, garantizando que todos los artículos tengan el mismo costo durante ese tiempo. El proceso inicia calculando todos los precios únicos disponibles. Luego, se aplica el algoritmo de la "Heurística Precio Único" para Precios No Adaptativos con el objetivo de obtener el ingreso promedio para cada precio a lo largo de varias secuencias de llegada de clientes. En cada periodo, se fija el precio único que maximiza el ingreso promedio.

En el inicio, se consideran todos los clientes y un stock inicial. A medida que transcurre el tiempo y los clientes llegan, estos se excluyen de la lista para calcular los precios únicos. Además, se actualiza el stock según las compras realizadas. El proceso dinámico se adapta a la llegada de nuevos clientes en cada periodo.

Considerando la misma instancia que se utilizó en la HMA, utilizando la secuencia de llegada de clientes $[5, 3, 1, 2, 4]$. Los precios únicos generados por los clientes son: $PU = \{190.61, 107.36, 115.70, 68.96, 271.17\}$.

1. Tiempo 1: Antes de llegar el cliente 5, el precio ya esta fijado y será igual para todos

los productos. Para obtenerlo, se consideran todos los clientes y un stock inicial de $m_{i1} = [3, 2, 1, 5, 4]$. Luego, se aplica el algoritmo de la "Heurística Precio Único", dando en promedio el mejor precio único para este tiempo \$190.61. Luego, se verifica que el cliente 5 cumple con la restricción de stock y presupuesto, y realiza la compra generando una ganancia de \$571.83.

2. Tiempo 2: Para este instante, se actualiza el stock $m_{i2} = [3, 1, 1, 4, 3]$ ya que el cliente 5 compró en el tiempo anterior. Se excluye al cliente 5 de la lista PU. El mejor precio único es \$107.36. El cliente 3 compra generando un ingreso de \$536.82.
3. Tiempo 3: Se excluyen a los clientes 5 y 3 y se actualiza el stock $m_{i3} = [2, 0, 0, 3, 2]$. Para este tiempo, el mejor precio único es: \$190.61. El cliente 1 no puede comprar ya que no hay suficiente stock del producto 3.
4. Tiempo 4: Para este punto, se excluye al cliente 1 y los demás (5 y 3), y se considera el mismo stock que el tiempo anterior, ya que no compraron. El mejor precio para este tiempo es: \$107.365. El cliente 2 no compra porque no hay stock del producto 2.
5. Tiempo 5: Para este tiempo, solo se considera el precio del cliente 4, ya que es el último que queda, por lo que es el mejor precio. De todas formas, no puede comprar ya que no hay stock disponible de los productos 2 y 3.

Aplicando esta estrategia, para esta instancia, el ingreso total es de \$1108.65, considerando las compras de los clientes 5 y 3.

En la siguiente sección 3.2.4, se realizará un estudio computacional para las heurísticas desarrolladas en precios dinámicos adaptativos.

3.2.4. Estudio Computacional para Precios Adaptativos

En esta sección se realizará un análisis comparativo y explicativo sobre el comportamiento de las diferentes heurísticas.

3.2.5. Instancias Aleatorias

A continuación, se analizará la siguiente instancia:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = [571.83, 429.46, 578.51, 206.89, 813.51], m = [3, 2, 1, 5, 4] \quad (3.14)$$

En la Figura 3.6 se muestran los ingresos generados por las estrategias de precios adaptativos. La evaluación se llevó a cabo considerando todas las posibles secuencias de llegada de clientes, en este caso, un total de 120.

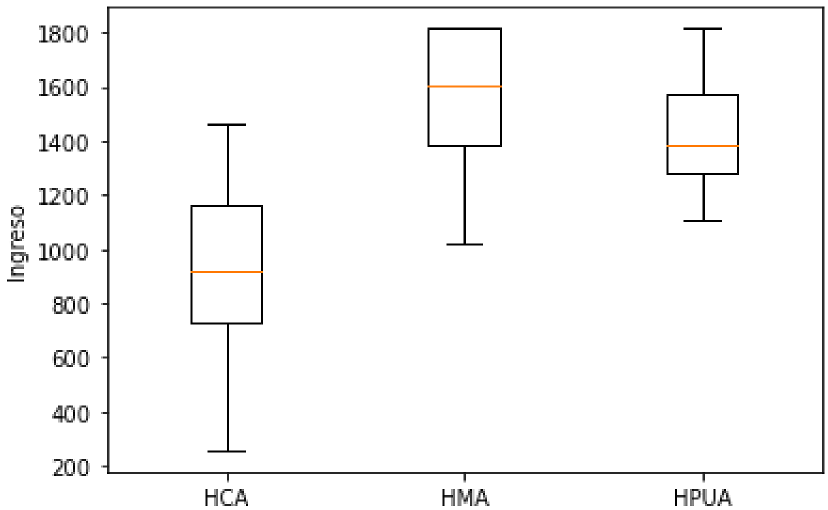


Figura 3.6: Variabilidad del ingreso para las heurísticas de precios adaptativos

La Figura 3.6, muestra la variabilidad de los ingresos en función de las diversas secuencias de llegada de clientes. Se destaca que, en promedio, la HMA logra el mayor ingreso. Esto se debe a que esta heurística, para cada período de tiempo, resuelve el MILP en el caso *O ine*, entregando precios que logran capturar el mayor presupuesto de los clientes en función del stock, incluso para aquellos que aún no han llegado. Es por esto que esta heurística es eficiente en poder predecir los posibles precios ya que se adapta en función de los presupuestos de los clientes y el stock.

Además, se observa que la HPUA tiene una menor variabilidad en los ingresos debido a la fijación de precios únicos. Los ingresos generados están más condicionados en comparación con fijar precios fijos, ya que estos últimos presentan una mayor variabilidad en la generación de ingresos. Tanto la HPUA como la HMA buscan obtener el mejor precio para los clientes futuros anticipando un precio que genere el mayor ingreso. Cabe destacar que, la HMA logra obtener el mayor ingreso en 60 secuencias de llegada, mientras que la HPUA solo lo logra en 20. Esto sugiere que la adaptabilidad de la HMA a las condiciones cambiantes del mercado la hace más efectiva en un mayor número de situaciones.

En cuanto a la HCA, se evidencia su menor eficiencia en adaptabilidad, lo cual se refleja en un menor ingreso promedio y mayor variabilidad en los ingresos. Esto se debe porque esta heurística fija los precios en función del cociente entre demanda y stock, dependiendo en gran medida de las compras actuales para establecer precios futuros, ya que su fijación está vinculada al stock y la demanda.

A continuación, se presenta la Tabla 3.3 que resume los máximos ingresos, ingresos promedios y tiempos de ejecución para cada heurística.

	HCA	HMA	HPUA
Ingreso Promedio	\$950.38	\$1567.69	\$1409.32
Máximo Ingreso	\$1465.6	\$1814.8	\$1814.8
Tiempo ejecución (seg)	0.012	4.24	4.68

Tabla 3.3: Ingresos promedio, ingresos máximos y tiempos de ejecución para las 120 secuencias de llegada de clientes.

Se observa de la Tabla 3.3 que tanto la HPUA como HMA logran generar el mayor ingreso. No obstante, se destaca que, en promedio, HMA exhibe el rendimiento más alto en términos de ingresos.

En cuanto a los tiempos de ejecución, se observa que la heurística más rápida en proporcionar una solución es la HCA. Esta eficiencia se debe a que esta heurística no implica subprocesos significativos para fijar precios en comparación con las otras dos heurísticas. Mientras que la HMA y la HPUA requieren la resolución del MILP y la determinación del mejor precio único para cada tiempo, respectivamente, procesos que demandan más tiempo al ejecutarse en múltiples secuencias de llegada.

3.2.6. Instancias utilizadas en Bucarey et al.[3]

El estudio evaluará la eficiencia y rapidez de las heurísticas desarrolladas para precios adaptativos. Se utilizarán instancias proporcionadas por la investigación de Bucarey et al. [3], considerando todas las combinaciones para las instancias de 25 y 50 clientes y productos. El presupuesto de los clientes variará entre 1 y 1000. Se emplearán los mismos parámetros de densidad (d) para la matriz de interés S y valores de α para el stock M, que se utilizaron en el estudio computacional de precios no adaptativos.

En primer lugar, se analizarán los tiempos promedios de ejecución para diferentes cantidades de secuencias de llegada en distintas combinaciones de clientes y productos. Se ejecutó cada heurística tanto para la instancia de 25 productos y clientes como para la de 50 clientes y productos, teniendo en cuenta diversas cantidades de permutaciones de llegadas de clientes (1, 10, 100, 1000).

La siguiente Tabla 3.4 proporciona una estimación de los tiempos de ejecución para las tres heurísticas: HCA (Heurística Cocientes Adaptativos), HMA (Heurística Modelo Lineal Enteros Mixtos Adaptativos) y HPUA (Heurística de Precio Único Adaptativo).

	HCA	HMA	HPUA
25 Clientes y 25 Productos	Segundos	Segundos	Segundos
1 permutación	0.003	0.24	3.49
10 permutaciones	0.01	2.75	34.29
100 permutaciones	0.13	27.26	340.56
1000 permutaciones	**1.48**	**283.33**	**3437.58**
50 Clientes y 50 Productos	Segundos	Segundos	Segundos
1 permutación	0.03	1.02	26.7
10 permutaciones	0.06	9.41	273.3
100 permutaciones	0.67	92.27	2733
1000 permutaciones	**6.5**	**954.53**	**27330**

Tabla 3.4: Estimación de tiempos de ejecución para diferentes combinaciones de productos, clientes y cantidad de permutaciones de clientes para cada heurística.

Con las estimaciones, se observó a partir de la Tabla 3.4 que la Heurística Cocientes Adaptativos es la más rápida en ejecución en comparación con las otras dos heurísticas. Sin embargo, el rendimiento computacional de la Heurística Precio Único Adaptativo se ve comprometido al considerar 1000 permutaciones de clientes para una instancia de 25 productos y clientes. La ejecución de una sola permutación de esta combinación toma 3437.58 segundos, lo que equivale a 57.2 minutos. Extrapolando este tiempo a 10 instancias con diferentes densidades d, se estima un tiempo total de ejecución de 103127.4 segundos, equivalentes a 1718.79 minutos o 28.64 horas. Este resultado pone de manifiesto la limitación de eficiencia de la heurística para abordar conjuntos de datos de esta magnitud y complejidad. De manera similar, ocurre con la Heurística MILP Adaptativos.

Es por esto que se optó por realizar 100 secuencias de llegada de clientes para poder comparar las ganancias utilizando la misma cantidad de llegadas de clientes. Los resultados se muestran en la Figura 3.7.

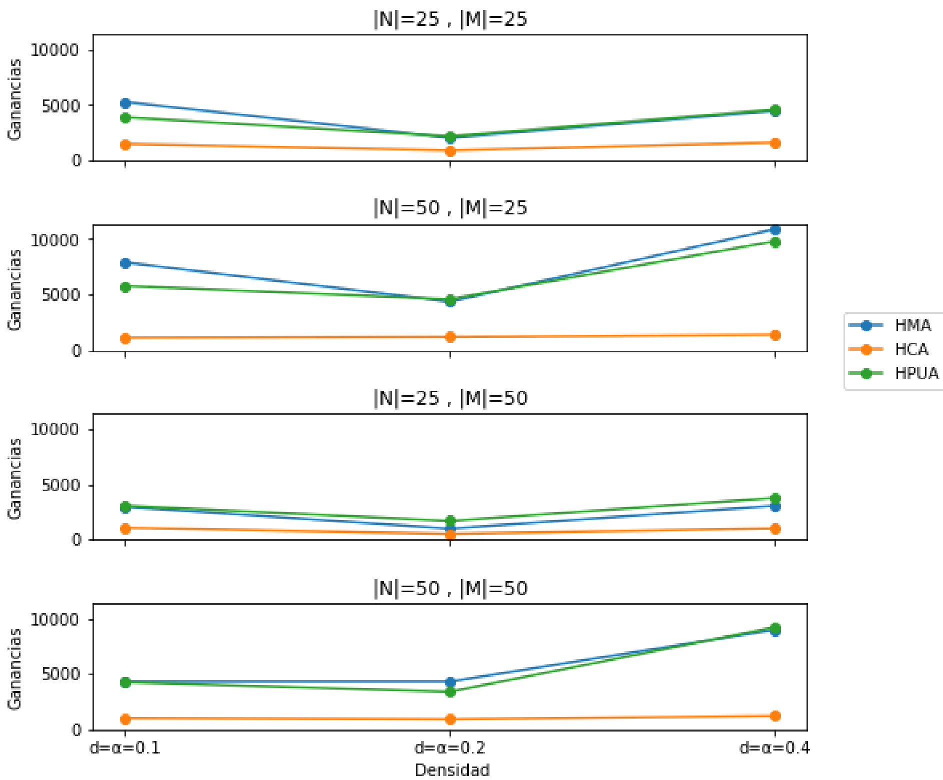


Figura 3.7: Ingresos promedio en función de distintas densidades de los parámetros de α y d para los diferentes algoritmos.

En la Figura 3.7, se evidencia que la HCA muestra una menor eficiencia en la determinación de precios y generación de ganancias en comparación con las otras estrategias. Esta desventaja puede atribuirse al enfoque de la heurística, que se basa en el cociente de la demanda. Específicamente, para los valores de $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.4\}$, la cantidad de inventario es reducida, siendo 1 para el caso de $\alpha = 0.1$ y en varios productos para $\alpha = 0.2$. Esto implica que los precios dependerán significativamente de la demanda y los precios únicos de cada instancia. Si existe una alta demanda y precios únicos bajos, los precios resultantes serán bajos, afectando con ingresos reducidos. En cambio, si los precios únicos son elevados y la demanda es alta, los precios resultantes también serán altos, teniendo como cajón superior el mayor precio único, limitando la capacidad de compra de los clientes. Este escenario condicionado contribuye a la menor eficiencia de la heurística en la generación de ingresos.

En cuanto a la HMA y la HPUA, ambas destacan por su eficiencia en la generación de ingresos, ya que tienen la capacidad de fijar precios de manera efectiva. Estas estrategias consideran información sobre clientes que aún no han realizado compras y actualizan el inventario al establecer precios para períodos futuros.

Es importante destacar que la eficiencia de estas heurísticas está condicionada a la posibilidad de que los clientes que se tienen en cuenta al fijar precios obtenidos por el MILP realmente realicen compras. En los casos en que los clientes considerados en el momento de ejecutar la estrategia efectivamente realicen compras, el ingreso generado será eficiente; de lo contrario, puede ser inferior.

Ambas heurísticas van más allá al proporcionar, al momento de fijar los precios, una estimación de los clientes que probablemente realizarán compras. Por lo tanto, si en un período llega un cliente que estaba considerado en los clientes que probablemente compren del MILP o la Heurística Precio Único, entonces el ingreso será eficiente; de lo contrario, serán más bajos. En general, ambas heurísticas predicen bien los precios independientemente de la secuencia de llegada de los clientes. Ambas son eficientes generando ingresos promedio altos. Por ejemplo, para el primer período, el MILP entrega un vector de precios donde algunos clientes del total de clientes compran. Entonces, si en cada período de tiempo llega a comprar algún cliente que compra en el MILP, los ingresos serán elevados; en caso contrario, si llegan clientes que en el MILP no compran, el ingreso será bajo.

3.2.7. Conclusiones del Estudio Computacional

Al analizar los resultados obtenidos en el estudio computacional sobre precios adaptativos, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

Las Heurísticas MILP Adaptativos y Precio Único Adaptativo demuestran ser las más eficientes en términos de generación de ingresos. Ambas tienen la capacidad de ajustar precios de manera efectiva considerando información sobre los clientes y actualizando el inventario para períodos futuros. Además, las mencionadas heurísticas ofrecen una estimación de los clientes que probablemente realizarán compras al fijar los precios. Esto permite generar ingresos eficientes cuando los clientes que llegan están dentro de los considerados en la fijación de precios.

Por otro lado, la Heurística Cocientes Adaptativos, muestra una menor eficiencia en comparación con las otras estrategias, ya que tiende a generar precios bajos o muy altos debido a la limitación en la variabilidad del inventario y la demanda, lo que condiciona la compra de los clientes.

En cuanto a los tiempos de ejecución, la Heurística Cocientes Adaptativos es la más rápida, pero menos eficiente en términos de ingresos. En contraste, las Heurísticas MILP Adaptativos y Precio Único Adaptativo requieren más tiempo de ejecución, lo que conlleva a una ineficiencia computacional. Es crucial considerar un equilibrio entre la eficiencia en la generación de ingresos y el tiempo de ejecución al seleccionar una estrategia de Precios Adaptativos para aplicaciones prácticas.

Capítulo 4

Caso Offline vs Caso Online

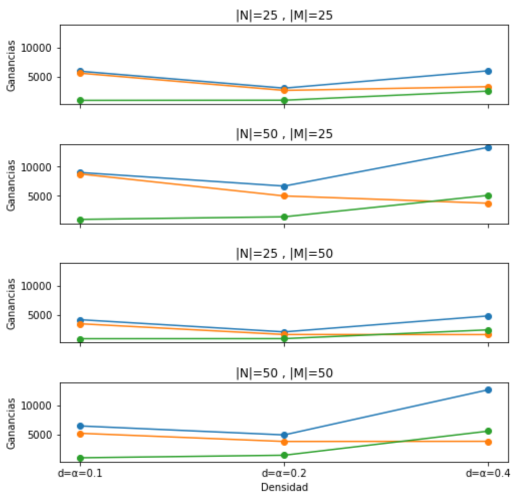
En este capítulo, se analizará la eficiencia y rapidez de los modelos y algoritmos desarrollados para los casos *Online* y *O ine*, examinando los resultados de las instancias utilizadas en Bucarey et al.[3].

De la Figura 4.1, se desprende que, en las combinaciones $|N| = 25, |M| = 25$ y $|N| = 25, |M| = 50$, el ingreso promedio bordea los 5000. Estos ingresos se obtienen al utilizar las heurísticas más eficiente para cada caso. Analizando los tiempos de ejecución para los diferentes problemas para estas instancias, los mejores candidatos son los algoritmos y modelos desarrollados en el caso *O ine*. Estos logran proporcionar soluciones en cuestión de segundos, considerando una cantidad de stock limitado.

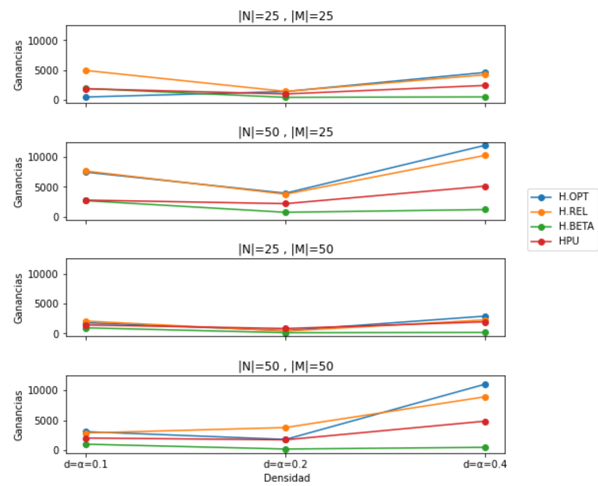
En el caso de las combinaciones $|N| = 50, |M| = 25$ y $|N| = 50, |M| = 50$, se observa que el uso del MILP para establecer precios, ya sea en el caso *O ine*, *Online* No Adaptativo y Adaptativo, resulta en los ingresos más convenientes. Además, al emplear Precios Únicos en el caso *O ine*, junto con el MOE y la H.P.U. en el caso *Online* No Adaptativo, así como la H.P.U.ADAP en el caso *Online* Adaptativo, los ingresos son eficientes, obteniendo en el caso *Online* Adaptativo los ingresos más eficientes. Es importante destacar que, para un valor de $\alpha = 0.4$, los ingresos aumentan significativamente debido a que, al incrementar el stock, se puede vender a más clientes. Con las combinaciones mencionadas, se tiene una gran variedad de clientes que pueden comprar por lo que los ingresos se incrementan.

Se observa que en algunas estrategias los ingresos disminuyen al aumentar la densidad de la matriz de interés de $d = 0.1$ a $d = 0.2$. Este fenómeno se debe a que, al incrementar la cantidad de productos en la matriz, el inventario de productos se mantiene prácticamente igual con $\alpha = 0.1$ o $\alpha = 0.2$. Este escenario reduce los ingresos, ya que hay una mayor demanda pero un inventario casi constante, lo que resulta en una disminución en el conjunto de clientes que pueden realizar compras.

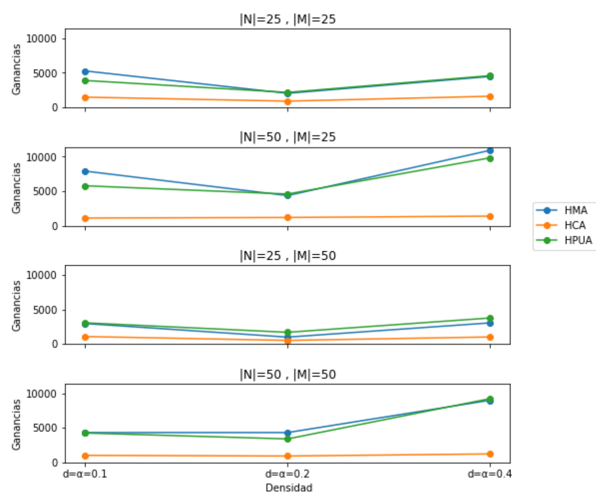
Si bien, estos dos caso apuntan a diferentes tipos de venta. Al evaluar los tiempos de ejecución y considerando lo ingresos obtenidos, el MILP del caso *Offline* emerge como un fuerte candidato para su aplicación en un contexto más real. Con una densidad de stock pequeña, se demora solo segundos en determinar un precio óptimo. Por otro lado, en el caso *Online* No Adaptativo, la Heurística MILP se demora en promedio 5 minutos, y para el caso *Online* Adaptativo, la Heurística MILP Adaptativos puede demorar horas en entregar precios para cada tiempo.



(a) Caso *Offline*



(b) Caso *Online* No Adaptativo



(c) Caso *Online* Adaptativo

Figura 4.1: Ingresos promedio en función de distintas densidades de los parámetros de α y d para los diferentes modelos y algoritmos de cada caso.

Conclusiones

El análisis exhaustivo que se llevo a cabo para las diversas estrategias de fijación precios para los diferentes casos y considerando diferentes escenarios y condiciones, proporciona perspectivas sobre la eficiencia y rapidez de cada enfoque.

En el caso *Offline* el MILP es el modelo más eficiente y rápido considerando un stock limitado porque es una formulación del problema. Por otra parte, el MOE aumenta su eficiencia a medida que el stock y la densidad de la matriz aumenta. Por ultimo, la HR es eficiente para instancias pequeñas y stock limitado.

Para el caso *Online* con Precios No Adaptativos, las heurísticas que utilizan como base el MILP demuestran una eficiencia significativa. En cuanto a la H.P.U. aumenta sus ingresos a medida que aumenta el stock y la densidad. Por ultimo la H.Beta, si bien, es rápida, es la menos eficiente. En promedio todas las heurísticas desarrolladas para este caso son rápidas

Finalmente, para el caso *Online* con Precios Adaptativos, la Heurística MILP Adaptativos y la Heurística Precio Único Adaptativo han demostrado ser efectivas para generar ingresos promedios altos, incluso anticipando las compras de clientes futuros. Pero, con tiempos de ejecución demasiados elevados.

Por otro lado, como se menciono anteriormente, el modelo MILP en un contexto *Offline* ha demostrado ser una opción eficiente y rápida para obtener soluciones óptimas en escenarios con densidad de stock pequeña. Sin embargo, su aplicación en contextos *Online*, ya sea adaptativo o no adaptativo, puede incurrir en tiempos de ejecución significativos, especialmente en situaciones donde se requiere ajustar los precios dinámicamente.

Además, las estrategias que utilizan Precios Únicos han mostrado resultados eficientes, especialmente en contextos *Online* No Adaptativo y Adaptativos, ofreciendo ingresos con menor variabilidad. La estrategia basada en Cocientes Dinámicos Adaptativos ha presentado limitaciones en términos de eficiencia y variabilidad en los ingresos, vinculadas a las restricciones de stock y la dependencia de la demanda.

Capítulo 5

Conclusiones y Perspectivas

Los diversos modelos y algoritmos abordados en este estudio han sido sometidos a varios experimentos, de los cuales se derivan las siguientes conclusiones:

Caso *Offline*:

En este caso, se pueden extraer conclusiones clave de las tres estrategias abordadas. El Método Precio Único demuestra eficiencia en términos de ingresos, ofreciendo resultados razonables considerando los tiempos de ejecución. En contraste, el Modelo Lineal Entero Mixto logra fijar precios de manera óptima con tiempos de ejecución rápidos cuando el stock es limitado, pero su eficiencia se ve comprometida a medida que aumenta el inventario, generando soluciones con un porcentaje de GAP significativo. La Heurística Ratio destaca por su velocidad de ejecución, siendo la más rápida independientemente del inventario. En términos de ingresos, demuestra eficacia especialmente cuando el inventario es limitado, alcanzando niveles similares a los del MILP.

Caso *Online*

En el caso *Online*, se presentan las principales conclusiones para las heurísticas desarrolladas para precios dinámicos no adaptativos y adaptativos.

No Adaptativo

Entre las estrategias heurísticas evaluadas, la Heurística Precio Único destaca por su estabilidad promedio frente a variaciones en el stock y la densidad de la matriz, proporcionando soluciones rápidas y distintivas características, evidenciadas a través de propiedades y conjeturas específicas. En contraste, la Heurística Beta se revela como una estrategia condicionada a los datos de cada instancia, resultando inestable y poco confiable en términos de ingresos, a pesar de su rapidez en la ejecución. Las estrategias basadas en el MILP, como Óptimos y Relajados, se posicionan como las más eficientes al lograr un equilibrio estable entre eficiencia en ingresos y rapidez en la solución. Estas dos últimas estrategias destacan especialmente en casos con stock de productos limitado.

Adaptativo

Entre las estrategias heurísticas adaptativas evaluadas, la Heurística Cocientes Adaptativos destaca por su velocidad en la ejecución, aunque se muestra menos eficiente en términos de ingresos. Esta estrategia depende fuertemente de la oferta y demanda, siendo menos eficaz en casos con inventarios limitados. Por otro lado, la Heurística MILP Adaptativos, al utilizar el vector de precios entregado por el MILP, muestra eficiencia al predecir precios y alcanzar ingresos máximos en algunos casos, pero padece de ineficiencia computacional al requerir un tiempo considerable para proporcionar una solución. En cuanto a la Heurística Precio Único Adaptativo, destaca por su eficiencia en ingresos al alcanzar máximos rendimientos, aunque es la estrategia que más tiempo tarda en proporcionar una solución.

General:

La elección de la estrategia de fijación de precios dependerá de diversos factores, como la disponibilidad de recursos computacionales, la velocidad requerida de respuesta y la naturaleza específica de la demanda y el inventario en cada escenario. La diversidad de enfoques analizados proporciona un marco sólido para tomar decisiones informadas y adaptar estrategias de precios a situaciones específicas.

Perspectivas

En cuanto a perspectivas futuras, se abren diversas mejoras para el estudio de estrategias de fijación de precios para los casos *Offline* y *Online*.

Considerando el Modelo Lineal Entero Mixto (MILP), que proporciona una solución óptima para el problema en el caso *Offline*, se sugiere la continuación de la investigación con el fin de explorar una variante de esta formulación que asegure eficiencia y rapidez incluso en situaciones de inventario ilimitado.

En el ámbito del caso *Online*, como se evidenció en este trabajo, las estrategias desarrolladas muestran ser computacionalmente costosas. Por ende, resultaría fundamental explorar la posibilidad de obtener información parcial de futuros vendedores, lo que podría conducir al desarrollo de estrategias más eficientes. La pregunta clave aquí sería: ¿Qué información específica se debería conocer?. Este interrogante plantea una línea de investigación interesante para analizar y diseñar nuevas estrategias adaptadas a este caso dinámico.

Bibliografía

[1] G. Aydin and J. K. Ryan. Product line selection and pricing under the multinomial logit choice model. In *Proceedings of the 2000 MSOM conference*, April 2000.

[2] N. Bansal, N. Chen, N. Cherniavsky, A. Rurda, B. Schieber, and M. Sviridenko. Dynamic pricing for impatient bidders. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)*, 6(2):1–21, 2010.

[3] Víctor Bucarey, Sourour Elloumi, Martine Labbé, and Fränk Plein. Models and algorithms for the product pricing with single-minded customers requesting bundles. *Computers & Operations Research*, 127:105139, 2021.

[4] Y. H. Chen and B. Jiang. Dynamic pricing and price commitment of new experience goods. *Production and Operations Management*, 30(8):2752–2764, 2021.

[5] M. Cheung and C. Swamy. Approximation algorithms for single-minded envy-free profit-maximization problems with limited supply. In *2008 49th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 35–44, October 2008.

[6] J. Correa, R. Montoya, and C. Thraves. Contingent preannounced pricing policies with strategic consumers. *Operations Research*, 64(1):251–272, 2016.

[7] M. Dada and K. N. Srikanth. Pricing policies for quantity discounts. *Management Science*, 33(10):1247–1252, 1987.

[8] Guillermo Gallego, Huseyin Topaloglu, et al. *Revenue management and pricing analytics*, volume 209. Springer, 2019.

[9] HubSpot. Estrategias de precio: Cómo establecer el precio correcto para tus productos o servicios. Consultado 04, 09, 2023.

[10] W. Ma, D. Simchi-Levi, and J. Zhao. Dynamic pricing (and assortment) under a static calendar. *Management Science*, 67(4):2292–2313, 2021.

[11] Garth P McCormick. Computability of global solutions to factorable nonconvex programs: Part i—convex underestimating problems. *Mathematical programming*, 10(1):147–175, 1976.

[12] R. Raj, M. H. Karwan, C. Murray, and L. Sun. A numerical optimization approach for pricing components in customer defined bundles in a b2b market. *Computers & Operations Research*, 155:106215, 2023.

[13] Y. Zhang, F. Y. Chin, S. H. Poon, H. F. Ting, D. Xu, and D. Yu. Offline and online algorithms for single-minded selling problem. *Theoretical Computer Science*, 821:15–22, 2020.