TRADE-OFF ENTRE EQUIDAD Y EFICIENCIA EN PROBLEMAS DE ASIGNACIÓN RESPECTO A ÍNDICES DE DESIGUALDAD

CONSUELO HELENA GONZÁLEZ TRUJILLO

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN GESTIÓN DE OPERACIONES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERA CIVIL INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍA:
VÍCTOR VERDUGO
PROFESOR CO-GUÍA:
WALDO GÁLVEZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
ANDREA CANALES
DANA PIZARRO

UNIVERSIDAD DE O'HIGGINS
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
ESCUELA DE INGENIERÍA
MAGISTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

RANCAGUA, CHILE
ENERO, 2024

Resumen

En el ámbito de la toma de decisiones económicas y/o sociales, surge la compleja cuestión de asignar recursos de manera eficiente. En el contexto de asignación de utilidades, se busca una distribución que maximice los beneficios de todos los agentes involucrados dadas las restricciones de asignación que se dispongan. Sin embargo, la búsqueda de eficiencia se enfrenta a un dilema: la equidad. Una distribución eficiente no garantiza una distribución equitativa de utilidades, y es que son dos objetivos que podrían ir en direcciones contrarias. Esto implica un trade-off inherente entre eficiencia y equidad, y lo que queremos es establecer los límites asociados a la pérdida de eficiencia al incorporar la equidad. Esta pérdida de eficiencia se conoce como *precio de la equidad*.

El enfoque de esta investigación se basa en el análisis de índices de desigualdad, que parametrizarán la incorporación de la equidad en la asignación de utilidades. Específicamente, investigamos dos índices de desigualdad conocidos: el índice de Gini y el índice de Simpson. A partir de este análisis, se extienden y generalizan los resultados a una familia de índices de desigualdad que cumplen con ciertas propiedades básicas comúnmente exigidas en la literatura. Los resultados revelan que, en el peor caso, en la búsqueda de la equidad, se sacrifica toda la eficiencia.

Agradecimientos

Quiero agradecer especialmente a mi mamá y papá, Marcela y Pedro, su apoyo y cariño han sido fundamentales durante toda mi vida y me han llevado a lograr los objetivos que me he propuesto. No tengo suficientes palabras para agradecerles todo lo que han hecho por mí, los quiero mucho. A mis hermanos, Pedro y Bianca, por su apoyo y risas. A mis sobrinos, Pedro, David e Irena, quienes me impulsan a esforzarme cada día para poder ser un buen referente y ofrecerles mi apoyo incondicional. A mis abuelos, Héctor y Alicia, su presencia y consejos son un regalo, espero puedan acompañarme durante mucho tiempo más. A mis tíos y primos, gracias por siempre estar y darme una palabra de aliento.

A mi mejor amiga Camila, por entenderme, apoyarme y aconsejarme desde los días de colegio hasta el presente. Agradezco a las amistades que forme, Lía, Enzo, Tomás, Sayli y Katherine, quienes me acompañan desde primer año y han sido una parte fundamental durante todos estos años de estudio. A Víctor, Sebastián y Adolfo, amistades que se sumaron durante el cuarto año de universidad, sin duda han enriquecido mi círculo de amistad. Agradezco a cada una de mis amistades, por muchas veces prestarme su hombro. Espero sigamos compartiendo lindos momentos y nuestra amistad perdure por siempre.

A mi compañero Ian, quién se incorporó a mi vida durante el transcurso de este proceso universitario, agradezco tu amor y apoyo incondicional.

A mis profesores, Víctor y Waldo, por su tiempo y orientación durante todo este trabajo de tesis. Gracias por su dedicación y siempre estar dispuestos a resolver mis dudas.

Con estas palabras, deseo expresar mis más sinceros agradecimientos. Jamás imaginé llegar hasta aquí, y sin ustedes, este logro no habría sido posible. Espero puedan acompañarme siempre y vamos por más!

Tabla de Contenido

Índice de Figuras

Capítulo 1

Introducción

1.1. Trade-off entre equidad y eficiencia

En el mundo de la toma de decisiones económicas y/o sociales, los conceptos de equidad y alcanzar la máxima eficiencia son dos objetivos que naturalmente inducen un trade-off, ya que a menudo pueden ir en direcciones contrarias. En un contexto de asignación de utilidades, se identifican y distribuyen las ganancias disponibles entre diferentes agentes en un momento dado. En este sentido, la maximización de utilidades se enfoca en garantizar que los agentes involucrados obtengan la máxima satisfacción cumpliendo las restricciones de asignación que se dispongan, es decir, que se maximice el beneficio obtenido por cada uno de estos. Por otro lado, la búsqueda de la equidad se enfoca en la justa distribución de utilidades, de modo que todos los agentes involucrados tengan un acceso justo a ellas.

Este problema ha sido vastamente estudiado en la literatura [1, 18, 19, 26], intentando contestar la siguiente pregunta: ¿Es posible alcanzar buenos niveles de equidad y eficiencia simultáneamente, o son objetivos irreconciliables? La presente investigación se enfoca en explorar y comprender el trade-off existente entre estos dos objetivos en el contexto de problemas de asignación de utilidades, prestando atención a la interacción que tienen para un conjunto de agentes.

A modo de ejemplificar este problema, consideremos un caso simple que implica a dos agentes. Sean el Agente 1 y el Agente 2 trabajadores de una misma empresa, en la que su remuneración consiste en sueldos que varían en un rango entre 0 y 1. En este contexto, donde 0 corresponde al sueldo mínimo posible y 1 corresponde al sueldo máximo posible, queremos entender el trade-off entre estos dos objetivos y cómo afecta la equidad en la asignación de sueldos.

Sean s_1 y s_2 los sueldos del Agente 1 y Agente 2, respectivamente. Consideremos los siguientes problemas de optimización.

Problema 1:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & s_1 + s_2 \\ \text{sujeto a} \quad & s_1 + s_2 \leq 1{,}5 \\ & s_1, s_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Problema 2:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & s_1 + s_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 3s_1 + s_2 \leq 2 \\ & s_1, s_2 \leq 1 \end{aligned}$$

En el contexto del Problema 1, se identifica que una asignación eficiente pero no equitativa de sueldos sería $(s_1, s_2) = (\frac{1}{2}, 1)$, la cual genera un beneficio total de 1,5. Sin embargo, se observa que es posible alcanzar una asignación que sea eficiente y equitativa, si pedimos que ambos agentes reciban el mismo sueldo, logrando $(s_1, s_2) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. Ambas asignaciones generan el mismo beneficio total de 1,5. Este análisis en específico destaca como la equidad en la asignación puede llevar a una solución que mantiene su eficiencia.

En el contexto del Problema 2, se identifica una asignación eficiente pero no equitativa con $(s_1, s_2) = (\frac{1}{3}, 1)$, generando un beneficio total de $\frac{4}{3}$. Al buscar una asignación que sea eficiente y equitativa, donde s_1 y s_2 sean iguales, se encuentra $(s_1, s_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, con un beneficio total de 1. Se destaca que, en este caso, alcanzar la equidad en la asignación conlleva a una disminución en las utilidades totales, evidenciando el trade-off entre ambos objetivos.

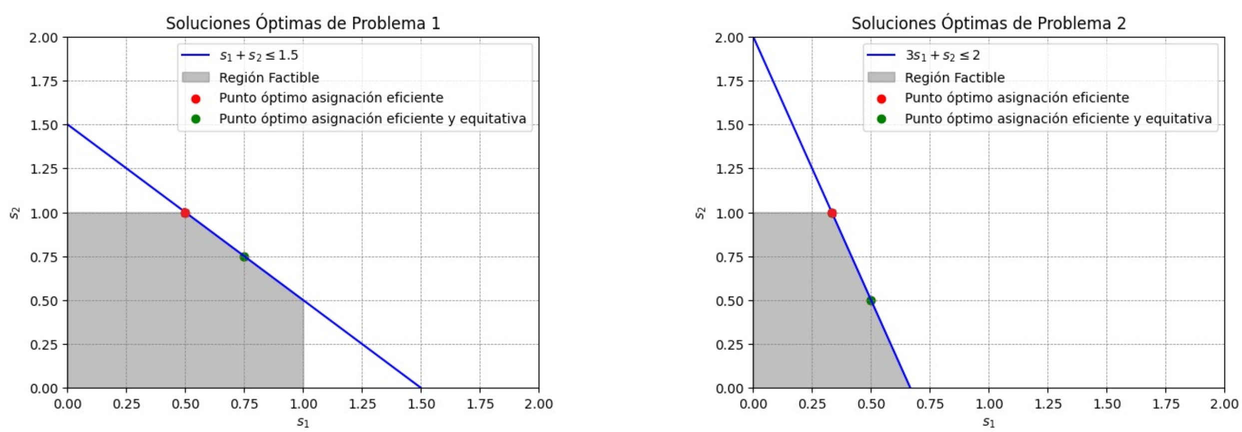

Figura 1.1: Se visualizan las soluciones óptimas correspondientes a los problemas de asignación de utilidades mencionados anteriormente. Cada solución óptima refleja la distribución de utilidades entre los agentes.

Estos resultados ejemplifican la complejidad de incorporar restricciones de equidad en problemas de asignación, ya que puede llevar a una pérdida de utilidades. Para abordar este dilema, es necesario encontrar enfoques que mitiguen este trade-off.

1.2. Resultados obtenidos

Lo que motiva esta investigación es entender el trade-off entre equidad y eficiencia. Queremos saber qué es lo que provoca que estos objetivos no puedan maximizarse simultáneamente y que, además, haya un precio que pagar por introducir la equidad. En torno a esto, uno de los resultados fundamentales obtenidos es demostrar que, en la búsqueda de equidad, es posible tener que perder toda la eficiencia.

Para abordar la pregunta inicialmente planteada, centramos la investigación en índices de desigualdad. Estos índices permiten medir la desigualdad asociada a una asignación de utilidades de manera objetiva y, por tanto, contribuyen a cuantificar el trade-off entre equidad y eficiencia. Tales índices han sido ampliamente estudiados en la literatura en diferentes contextos relevantes, ya sean económicos, públicos, políticos, entre otros [15, 16, 20, 23, 24].

Los índices de desigualdad son funciones que cumplen ciertas propiedades, como por ejemplo ser Lorenz-consistentes [7] y estandarización [12]. El análisis realizado muestra que, si nos restringimos a esta familia de índices de desigualdad (Ver Capítulo 3), la búsqueda de asignaciones equitativas acorde a dichos índices conlleva como costo una pérdida de utilidad en la asignación arbitrariamente alta. Es decir, equidad y eficiencia son dos objetivos que, dado estos requerimientos, van a ser irreconciliables.

Es relevante mencionar que estos requerimientos son minimales, en el sentido de que, si relajamos uno de estos requisitos, es posible reconciliar ambas cosas. En específico, este argumento ha sido demostrado con un análisis ajustado para el caso del índice de Simpson relajando la condición de estandarización, la cual no satisface. Empleando el índice de Simpson, se prueba que no es necesario tener que perder toda la utilidad al incorporar restricciones de equidad (ver Capítulo 4). Los resultados anteriores se complementan con un análisis ajustado para el caso del índice de Gini, el cual cumple con las condiciones de ser Lorenz-consistente y estandarizado (ver Capítulo 5).

Entonces, respondiendo con más certeza la pregunta sobre la posibilidad de alcanzar equidad y eficiencia de forma simultánea, se concluye que no es posible, al menos cuando se estudian índices de desigualdad que cumplen las propiedades Lorenz-consistente y estandarización.

1.3. Trabajo relacionado

Una forma en la que la literatura ha confrontado el problema de asignar recursos eficiente y equitativamente es utilizando técnicas relacionadas a aversión al riesgo. La asignación se lleva a cabo de manera que se maximice una función del beneficio total de los agentes, la cual vuelve menos deseables las asignaciones dispares y más deseables las asignaciones balanceadas. En este contexto, Bertsimas et al. [2] plantean el modelo α-Fairness, un mecanismo de asignación que incorpora la equidad en su solución. En dicho trabajo plantean que una asignación de recursos eficiente no siempre es justa para todos los agentes involucrados. De hecho, ellos demuestran que pedir eficiencia y equidad son dos objetivos de asignación que van en sentidos contrarios, ya que empleando su modelo, proporcionan límites estrictos asociados a la pérdida relativa de eficiencia debido a una asignación equitativa. Dada esta disminución de eficiencia, se define el Price of Fairness (PoF) [2], que es el precio que se debe pagar por incoporar dicha noción de equidad.

Los autores definen un problema de maximización dado un conjunto de utilidades U como

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{1}^T u \\ \text{s.a} \quad & u \in U \end{aligned}$$

Donde la máxima utilidad total alcanzable en U es $\mathsf{System}(U) = \sup(\mathbf{1}^T u | u \in U)$.

El problema de asignación α-Fairness denotado por $z(\alpha)$ es $argmax_{u \in U} W_\alpha(u)$, el cuál asigna las utilidades maximizando la función de bienestar social de elasticidad constante W_α, parametrizada por $\alpha \geq 0$.

$$W_\alpha(u) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{u_j^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{para } \alpha \geq 0, \alpha \neq 1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \log(u_j) & \text{para } \alpha = 1 \end{cases}$$

Dado esto, la máxima utilidad alcanzable bajo el modelo α-Fairness es $\mathsf{Fair}(U;\alpha) = \mathbf{1}^T z(\alpha)$. Entonces, la pérdida de eficiencia en comparación con la eficiencia máxima al incorporar el parámetro α, se define como:

$$\mathsf{PoF}(U;\alpha) = \frac{\mathsf{System}(U) - \mathsf{Fair}(U;\alpha)}{\mathsf{System}(U)}.$$

Es relevante notar que para $\alpha = 0$, se cumple $\mathsf{System}(U) = \mathsf{Fair}(U;0)$, por tanto, $\mathsf{PoF}(U;0) = 0$. Por otro lado, para $\alpha_k \in \mathbb{R}$ una sucesión creciente tal que $\alpha_k \geq 1$ y $\alpha_k \to \infty$, se obtiene en el límite el caso donde todas las utilidades de los agentes deben ser iguales.

Con miras a atender la situación anterior, Bertsimas et al. [2] diseñan un caso de estudio relacionado con la gestión del flujo de tráfico aéreo, con el propósito de ejemplificar el trade-off entre equidad y eficiencia. Este caso menciona que, al presentarse condiciones climáticas impredecibles, la gestión de los vuelos se considera justa debido a que la reprogramación de estos mantiene su planificación original. La problemática recae en que esta situación no es eficiente, ya que los retrasos asociados a la reprogramación, generan costos significativos. Sin embargo, a pesar de tener propuestas que reducen los retrasos y sus costos, estas no han sido aplicadas dado que no abordan el tema de si las ganancias de la optimización se distribuirán de manera equitativa entre las partes involucradas. A partir de estos antecedentes, el caso concluye que al elegir un valor de α en el modelo α-Fairness [2], es posible negociar eficiencia por equidad.

De manera semejante, Breugem et al. [3] plantean un caso de estudio enfocado en la asignación equitativa y atractiva de labores a trabajadores en turnos rotativos. El objetivo principal es lograr que la asignación de labores sea lo más equitativa posible, mientras que, por otro lado, debe maximizarse el atractivo de los turnos rotativos. La atractividad hacia los turnos rotativos se basa en los atributos que tiene cada labor asignada a un turno y, además, que permita un equilibrio entre trabajo y vida personal de la programación del turno. El propósito es que todos los trabajadores desempeñen las labores en igualdad de condiciones en los turnos predefinidos, ya que estos van a presentar un mejor desempeño ante situaciones laborales óptimas. Es relevante destacar que, al igual que en el caso anterior, es posible tener un conjunto de programación de turnos que sea equitativo, pero no atractivo, y viceversa. Por ejemplo, se podría lograr una distribución equilibrada de tareas entre los turnos (es decir, una asignación justa), pero a su vez, se podría tener una carga laboral alta durante un periodo de tiempo (es decir, una programación de turnos no atractiva). Por tanto, este caso busca alcanzar un equilibrio entre la asignación equitativa de tareas y la atracción de los trabajadores hacia los turnos.

Tal como los dos casos planteados anteriormente, existen diversos contextos en los que se puede aplicar un método de asignación de recursos. Por ejemplo, Cohen et al. [4] abordan la discriminación de precios en el contexto del e-commerce y plantean preocupaciones en términos de equidad. El método que proponen es un marco formal para la fijación de precios con equidad. Para esto, se presentan cuatro definiciones de equidad relacionadas a este contexto:

1. La equidad de precios impone que los precios ofrecidos sean iguales para todos los consumidores;
2. La equidad de la demanda impone que el acceso al producto sea lo más cercano posible para todos los consumidores;
3. La equidad del excedente impone que el excedente promedio sea igual para cada consumidor; y
4. La equidad de valoración monetaria sin compra impone que la pérdida de valor de los consumidores que no compran el producto sea similar para todos.

Asimismo, los autores señalan que satisfacer todos los objetivos de equidad simultáneamente es imposible, por lo que se evalúa un modelo empleando cada objetivo por separado e identifican las condiciones bajo las cuales el bienestar social aumenta o disminuye. Además, es relevante mencionar que, imponer equidad para el consumidor resulta en una pérdida de ganancias para el vendedor. Se concluye que imponer cierta equidad puede aumentar el bienestar social, pero imponer demasiada equidad puede llevar a una pérdida total, donde ni el consumidor ni el vendedor tendrán ganancias.

En relación a los estudios que se abordaron anteriormente [2, 3, 4], cada uno de estos estudios presenta un enfoque diferente, explorando diferentes definiciones de equidad, evaluando su impacto en el bienestar social, así como las pérdidas y ganancias que puede traer consigo. En conclusión, los autores coinciden en que la búsqueda de la equidad puede implicar una pérdida de eficiencia en la solución de asignación, de modo que si se busca un nivel excesivo de equidad, esto puede resultar en una pérdida significativa de eficiencia.

En ciertas circunstancias es factible establecer límites en las pérdidas de eficiencia y equidad, incluso cuando dichos límites resulten en la pérdida total de alguno de los dos objetivos. El propósito es lograr un equilibrio entre eficiencia y equidad mediante un solo parámetro específico. Un ejemplo de esto es el modelo α-Fairness [2]. En este modelo, el parámetro α se define con $\alpha \geq 0$, donde $\alpha = 0$ representa total libertad en cuánto a equidad, y $\alpha \to \infty$ representa la incorporación de absoluta equidad en la asignación. Otro parámetro relevante está vinculado a la incorporación de la equidad a través de índices de desigualdad, los cuales se definirán en su propio dominio. La distinción entre el parámetro $\alpha \geq 0$ y un índice de desigualdad recae en que el modelo α-Fairness [2] modifica la función objetivo, mientras que un índice de desigualdad incorpora restricciones. Por esto es que se tiene un enfoque particular en el índice de Gini [6, 12, 25] y el índice de Simpson [9, 22]. Para comprender el trade-off entre eficiencia y equidad, se analizan las propiedades bajo las cuáles se rigen cada uno de estos índices de desigualdad. El propósito es examinar las condiciones que determinan cada propiedad, lo que a su vez, permite generalizar las condiciones que definen el comportamiento de este trade-off, que representa el precio a pagar al pedir equidad.

Como describen ciertos estudios [6, 7, 12, 25], el índice de Gini se rige por una serie de propiedades. Estas propiedades incluyen ser Lorenz-consistente, que reúne las características de invarianza bajo escalamiento, principio de Pigou-Dalton, replicación, simetría, y también, estandarización. Por otra parte, el índice de Simpson, a diferencia del índice de Gini, no cumple con la propiedad de estandarización, como se ha observado en algunos estudios [9, 22]. Para generalizar las condiciones que definen el comportamiento del trade-off entre eficiencia y equidad, se estudian otros índices de desigualdad en investigaciones previas [11, 13, 14, 25], para saber cuáles son las propiedades que cumple cierta familia de índices de desigualdad.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se presentan los fundamentos que definen los conceptos preliminares necesarios para comprender los temas que se abordan en esta tesis. Estos conceptos y definiciones son la base sobre la cual se construirá el análisis y se obtendrán los resultados esperados.

Comencemos definiendo qué es un problema de asignación de utilidades, concepto que será utilizado recurrentemente a lo largo de la tesis.

Definición 2.1 (Problema de asignación de utilidades) *Dada una función* $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$*,* $f(u)$ *representa el beneficio asociado a la distribución de utilidad* u *entre los agentes. El objetivo es maximizar el beneficio total entre las asignaciones factibles, modelado como sigue:*

$$\begin{aligned} max \quad & f(u) \\ s.a \quad & u \in U \end{aligned}$$

En el contexto de la tesis, la función $f(u)$ corresponde a la suma de las utilidades. Es decir,

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

2.1. Índices de desigualdad

En esta sección se definen los índices de desigualdad fundamentales para este trabajo, junto con las propiedades que satisfacen.

Definición 2.2 (Índice de desigualdad) *Un índice de desigualdad es una familia de funciones* $I_n : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, *lo que se interpreta como una función que recibe asignaciones de utilidad entre* n *agentes y retorna un índice expresando qué tan desigual es dicha asignación.*

En relación a los índices relevantes a estudiar, se considera el Índice de Gini e Índice de Simpson. Ambos son índices ampliamente utilizados en la economía para cuantificar y analizar la desigualdad en la distribución de ingresos en una población [5, 8, 10, 17].

1. **Índice de Gini.** Este índice proporciona una medida numérica de la desigualdad en una distribución de utilidades o ingresos. Se define como:

$$G_n(u) = \frac{1}{2n\sum\limits_{i=1}^{n} u_i} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |u_i - u_j|. \tag{2.1}$$

   Es una función en la que se toman los valores absolutos de la diferencia entre pares y se normaliza en función del promedio. El resultado numérico proporcionado por el índice de Gini está en el intervalo de 0 a 1, donde 0 indica una distribución de utilidades completamente igualitaria y 1 indica una distribución completamente desigual. Cuanto más cercano a 1 sea el valor del índice, mayor será la desigualdad en la distribución.

   Consideremos los siguientes ejemplos. Sean utilidades $u_i \in \{0,1\}$, $i = \{1,2,\ldots,n\}$, entre n agentes.

   (a) Para el vector de utilidades $u = (1,1,1,1,0,0,0,0,0,0)$ entre 10 agentes, la utilidad total es 4. La desigualdad asociada a esta distribución de utilidades es $G_n(u) = 0{,}6$.

   (b) Para el vector de utilidades $u = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ entre 10 agentes, la utilidad total es 10. La desigualdad asociada a esta distribución de utilidades es $G_n(u) = 0$.

   En el ejemplo (a) la utilidad total es baja y la distribución de utilidades es desigual. Esto indica un índice de Gini relativamente alto, indicando una mayor desigualdad.

   En el ejemplo (b) se visualiza que una distribución equitativa de utilidades entre todos los agentes conlleva a que el índice de Gini sea 0, indicando que la desigualdad es mínima.

2. **Índice de Simpson.** Este índice proporciona una medida numérica de la concentración o desigualdad en una distribución de categorías o elementos. Se define como:

$$S_n(u) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\right)^2}. \tag{2.2}$$

Es una función definida por la suma de los cuadrados de las proporciones de cada categoría en relación con el total. El resultado numérico proporcionado por el índice de Simpson está en el intervalo de 0 a 1, donde 0 indica una distribución completamente diversa o uniforme y 1 indica una distribución altamente concentrada o desigual. Cuanto más cercano a 1 sea el valor del índice, mayor será la concentración en las categorías o elementos de la distribución, lo que indica una mayor desigualdad.

Consideremos el siguiente ejemplo. Sean utilidades $u_i \in \{0, 1\}$, $i = (1, 2, \ldots, n)$, entre n agentes.

(a) Para la asignación $u = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ entre 10 agentes, la utilidad total es $U = 5$. La desigualdad asociada a esta distribución de utilidades es $S_n(u) = 0{,}5$.

En el ejemplo (a) el vector de utilidades muestra que algunos agentes tienen utilidades más altas que otros, esto contribuirá a la desigualdad en la distribución. En tanto, el índice de Simpson sugiere una distribución moderada de desigualdad.

2.1.1. Propiedades de los índices de desigualdad

En la literatura, se han identificado ciertas propiedades básicas que son requisito para poder medir desigualdad. Entre estas propiedades, nos enfocamos particularmente en las siguientes:

1. **Invarianza bajo escalamiento.** Sea I_n un índice de desigualdad y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto de asignaciones de utilidad factibles. Si la utilidad u_i de cada agente i se multiplica por un factor común $\beta > 0$, entonces la desigualdad permanece sin cambios. Es decir,
$$I_n(\beta u) = I_n(u).$$
Es natural pedir que el índice I_n sea invariante respecto a las unidades en las que se miden los ingresos, en este contexto, las utilidades. Esto permitirá llevar a cabo comparaciones y comprender los resultados de manera coherente y consistente.

2. **Principio de Pigou-Dalton.** Sea I_n un índice de desigualdad y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto de asignaciones de utilidad factibles. Si se hace una transferencia de utilidades m desde el agente i con utilidad u_i al agente j con utilidad u_j tal que
$$u_i - m > u_j + m,$$
entonces el índice I_n no aumenta. En cambio, si se hace una transferencia de utilidades desde el agente i con utilidad u_i al agente j con utilidad u_j tal que
$$u_i - m < u_j + m,$$
entonces el índice I_n no disminuye. Se necesita que el índice I_n satisfaga esta propiedad debido a que la desigualdad no puede disminuir en una población cuando las utilidades son transferidas de un agente con menos recursos a otro con más recursos.

3. **Simetría.** Sea I_n un índice de desigualdad y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto de asignaciones de utilidad factibles. Si las utilidades de los agentes se reordenan dentro de la población, entonces el índice I_n permanece sin cambios. Es decir,

$$I_n(\pi(u)) = I_n(u),$$

   donde $\pi(u)$ es cualquier permutación de u. Esto igualmente hace mención a que el índice I_n es independiente de cualquier característica que no sea el conjunto de utilidades. Se necesita que el índice I_n satisfaga esta propiedad, debido a que proporciona coherencia y robustez, permitiendo comparaciones consistentes entre distintas distribuciones de utilidades.

4. **Principio de replicación.** Sea I_n un índice de desigualdad y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto de asignaciones de utilidad factibles. Si se replica la población un número arbitrario de veces $t > 0$, entonces el índice I_n permanece sin cambios. Es decir,

$$I_n(u) = I_{tn}(u, \ldots, u),$$

   donde $(u, \ldots, u) \in U^t \subseteq \mathbb{R}^{tn}$ es el vector que se obtiene de t copias de u. Es necesario que el índice I_n satisfaga esta propiedad, ya que garantiza que dicho índice no se vea afectado por modificaciones en el tamaño de la población a través de repeticiones. De esta forma, la distribución de utilidades se mantiene sin variaciones.

5. **Estandarización.** Sea I_n un índice de desigualdad y un vector de utilidades $u \in U$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto de asignaciones de utilidad factibles, con k entradas iguales a 1 y $n - k$ entradas iguales a 0, es decir

$$u = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0).$$

   Entonces,

$$I_n(u) = 1 - \frac{k}{n}.$$

   Esto quiere decir que la diferencia de desigualdades entre cada agente i serán iguales a una constante común para k fijo, ya que la desigualdad va a ir en aumento respecto a n, que corresponde al número de agentes.

Otra propiedad usualmente mencionada en la literatura es la condición de que el índice I_n sea Lorenz-consistente al medir inequidad en problemas de asignación. Para comprender esta condición, es útil introducir algunos términos clave.

En general, decimos que una función $F : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$ es una distribución si F es no-decreciente, $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$, $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, y es continua por la derecha. Dado que una distribución F no siempre es continua, la inversa no necesariamente existe en todo punto. Por lo tanto, trabajamos con la inversa generalizada que se define como $F^{-1}(t) = \inf\{y \in \mathbb{R} : F(y) \geq t\}$.

Definición 2.3 (Curva de Lorenz) *Dada una distribución* $F : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$*, la curva de Lorenz es la función* $L_F : [0,1] \to [0,1]$ *tal que*

$$L_F(p) = \frac{1}{\int_0^\infty (1 - F(s))\mathrm{d}s} \int_0^p F^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{para todo } p \in [0,1].$$

Para un vector de ingresos $u = (u_1, \ldots, u_n)$, para $t \geq 0$ sea

$$\ell(u,t) = \text{máx}\left\{ j \in \{1, \ldots, n\} : \sum_{i=1}^{j} u_i \leq t \right\}.$$

Sea $F_u : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ la función tal que $F_u(t) = \sum_{j=1}^{\ell(u,t)} u_j$ para todo $t \geq 0$. La función F_u es de hecho una distribución cuando $\sum_{j=1}^{n} u_j = 1$.

La curva de Lorenz se utiliza para representar gráficamente la desigualdad en la distribución de la variable que se estudia. Esta curva se construye mediante una función que asigna a cada distribución de la población (p) una distribución acumulada de U, que se denomina $L_F(p)$. Es decir, $L_F(p)$ muestra como se distribuye la variable U en una distribución específica de la población.

A modo de ilustración, una curva de Lorenz estándar para una distribución continua de utilidades se ve como en la Figura 2.1. La Línea de Igualdad en la gráfica representa una distribución completamente igualitaria, donde todos tienen la misma cantidad de utilidades, es decir, $L_F(p) = p$. Mientras que si la distribución es desigual, la curva de Lorenz se encuentra debajo de esta Línea de Igualdad. Para crear la curva de Lorenz, se trazan los puntos $(p, L_F(p))$. En tanto, el área existente entre la línea de igualdad y la curva de Lorenz, refleja visualmente el nivel de desigualdad en la distribución de utilidades en la población.

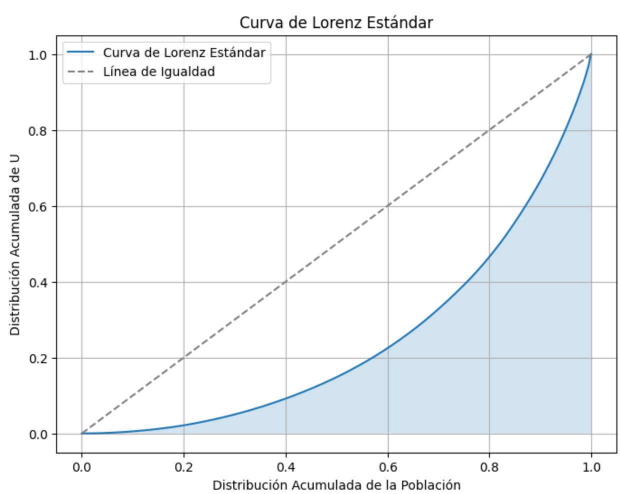

Figura 2.1: La curva de Lorenz estándar para una distribución continua de utilidades. El eje x representa la distribución acumulada de la población y el eje y representa la distribución acumulada de U.

Para el caso del índice de Gini, es posible escribir explícitamente una dependencia funcional entre este índice y la curva de Lorenz [6]. En particular, se establece mediante una integral ($G(u)$).

$$G(u) = 2\int_0^1 (p - L_{F_u}(p))\,dp \quad \text{para todo } p \in [0,1].$$

Esta cuantifica en qué medida la curva de Lorenz se desvía de la completa equidad, que corresponde a la Línea de Igualdad.

La Figura 2 representa la curva de Lorenz que ilustra cómo el índice de Gini se comporta en el contexto de una distribución continua de utilidades. Para esta distribución, se obtiene que el índice de Gini es igual a 0.34.

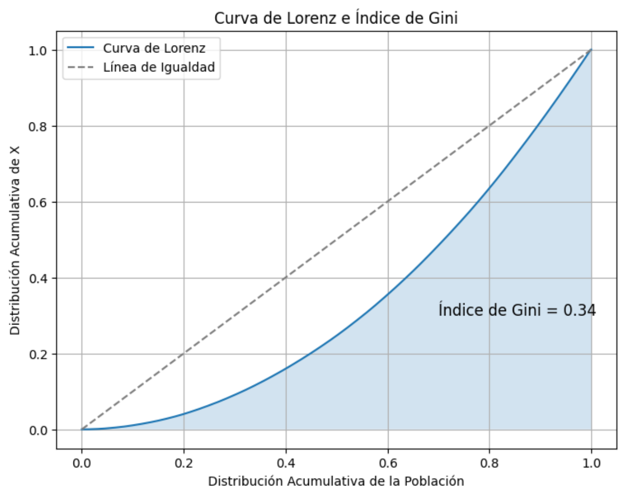

Figura 2.2: La curva de Lorenz representa cómo se comporta el índice de Gini en el contexto de una distribución continua de utilidades. El eje x representa la distribución acumulada de la población y el eje y representa la distribución acumulada de U.

En tanto, la curva de Lorenz proporciona un criterio útil conocido como ser Lorenz-consistente.

Definición 2.4 (Lorenz-consistente) *Para dos distribuciones, u y v, se dice que u tiene mayor o igual desigualdad que v bajo el criterio de Lorenz, denotado por uLv, si satisface:*

$$uLv \Longrightarrow L_{F_u}(p) \leq L_{F_v}(p) \quad \textit{para todo } p \in [0,1].$$

Finalmente, una medida de desigualdad I es Lorenz-consistente si:

$$uLv \Longrightarrow I_n(u) \geq I_n(v).$$

El criterio Lorenz-consistente se refiere a la propiedad de estabilidad relativa de la distribución de utilidades en una población a medida que se realizan cambios en la asignación de los recursos entre los agentes. Esto implica que cualquier cambio en la distribución de utilidades, ya sea hacia una mayor desigualdad o una menor desigualdad, debe reflejarse en el valor del índice I_n de manera coherente. Basándose en este criterio, el resultado que es de interés es el propuesto por Foster [7], el cual señala que de hecho las propiedades establecidas anteriormente son equivalentes a ser Lorenz-consistente.

Teorema 2.5 (Foster [7]) *Un índice de desigualdad I_n es Lorenz-consistente si y solo si I_n satisface invarianza bajo escalamiento, principio de Pigou-Dalton, simetría y principio de replicación.*

Una vez que se han establecido las condiciones que deben cumplir los índices de desigualdad, tales como Lorenz-consistente y estandarización, procedemos a definir el problema de maximización de utilidades parametrizado por $\gamma \in [0, 1]$, que se relaciona con una cota asociada a un índice de desigualdad I_n. Este último problema, que modela la maximización de utilidades con la inclusión de equidad, nos brinda la oportunidad de medir la pérdida de utilidad asociada a la incorporación de equidad en la distribución de utilidades, lo que usaremos para introducir el concepto de *precio de la equidad.*

2.2. Maximizar utilidades con restricciones de equidad

En esta sección se introduce el problema de maximización de utilidades con restricciones de equidad.

Recordemos que dado un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y convexo de utilidades factibles, se define

$$\mathsf{Welfare}(U) = \text{máx}\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i : u \in U\right\}$$

como el valor de la máxima utilidad total alcanzable en U. Dada una familia de índices de desigualdad $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $I_n : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y dado $\gamma \in [0, 1]$, se define

$$\mathcal{F}(I_n, U, \gamma) := \{u \in U : I_n(u) \leq \gamma\}.$$

Incorporar una restricción de equidad en una asignación de utilidades implica no solo la maximización de utilidad total, sino también la distribución equitativa de estas utilidades entre los agentes involucrados, estando sujeta a un parámetro γ. Nuestro interés radica en medir la pérdida de eficiencia resultante de la introducción de esta restricción de equidad en el problema de maximización de utilidades.

Esta idea se refleja en la siguiente definición.

Definición 2.6 (Precio de la equidad) *Sea un índice de desigualdad I_n. Dado un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y convexo de utilidades factibles, y dado $\gamma \in [0,1]$, el precio de la equidad corresponde a*

$$\mathsf{PoE}(I, U, \gamma) = 1 - \frac{\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I, U, \gamma))}{\mathsf{Welfare}(U)}.$$

Observemos que se imponen ciertas condiciones sobre el conjunto U, las que son convexidad y compacidad. En este problema de maximización de utilidades con restricciones de equidad, la solución óptima está contenida en U. La convexidad de U se establece al cumplir la propiedad de que, para cualquier par de puntos dentro del conjunto, la línea que conecta esos dos puntos también está contenida en el conjunto. Esto es útil debido a que al incorporar la restricción de equidad en la región factible del conjunto U, si este no fuera convexo, existe la posibilidad de que la utilidad de la solución óptima con restricciones de equidad es cero, indeterminando el precio de la equidad. Por otro lado, se destaca que el conjunto U sea un conjunto compacto para asegurar la existencia de un óptimo en el problema de maximización de utilidades.

Una vez definido el *precio de la equidad*, nuestro interés se centra ahora en estudiar su comportamiento en función de γ y n, en torno a un conjunto de utilidades U.

Definición 2.7 (Máximo valor del precio de la equidad) *Para cualquier índice de desigualdad I_n y sea $\gamma \in [0,1]$, el precio de la equidad se define como el máximo valor del precio de la equidad sobre todos los conjuntos de asignaciones de utilidad posibles $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Es decir*

$$\mathsf{PoE}(I_n, \gamma) = \sup_{U \subseteq \mathbb{R}^n} \mathsf{PoE}(I_n, U, \gamma).$$

Hacia una caracterización del peor caso para el precio de la equidad

A continuación, se presentan dos lemas sobre el conjunto U. Estos lemas construyen conjuntos de utilidades específicos que conllevan al escenario del peor caso para el *precio de la equidad.*

Lema 2.8 *Sea $U \subseteq [0,1]^n$ convexo, compacto y tal que $e_i \in U$, $i = 1, \ldots, n$, donde e_i corresponde a los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. Sea $u^* = argmax_{u \in U} \sum_{i=1}^n u_i$ y sea $U^* = conv(\vec{0}, e_1, \ldots, e_n, u^*)$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\gamma > 0$, se cumple que*

$$\mathsf{PoE}(I_n, U, \gamma) \leq \mathsf{PoE}(I_n, U^*, \gamma).$$

Demostración. Se debe notar que $U^* \subseteq U$, pues U^* es la envoltura convexa de elementos de U, y por tanto, $\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, U^*, \gamma)) \leq \mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, U, \gamma))$. Además,

$$\mathsf{Welfare}(U^*) = \mathsf{Welfare}(U).$$

De hecho, puesto que $U^* \subseteq U$, entonces $\mathsf{Welfare}(U^*) \leq \mathsf{Welfare}(U)$. Sin embargo, como $u^* = argmax_{u \in U} \sum_{i=1}^{n} u_i$, sabemos que $\mathsf{Welfare}(U)$ alcanza su máximo valor en $u^* \in U^*$, por lo que se concluye lo enunciado. Esto permite concluir que

$$1 - \frac{\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, U, \gamma))}{\mathsf{Welfare}(U)} \leq 1 - \frac{\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, U^*, \gamma))}{\mathsf{Welfare}(U^*)}.$$

Y por lo tanto, por definición del PoE, se cumple que $\mathsf{PoE}(I_n, U, \gamma) \leq \mathsf{PoE}(I_n, U^*, \gamma)$. □

En el siguiente lema, se construye el conjunto $\tilde{U}$ para probar la existencia de un escenario más desfavorable, donde el PoE será mayor.

Lema 2.9 *Sea $u^* \in [0,1]^n$ y $U^* = conv(\vec{0}, e_1, \ldots, e_n, u^*)$. Existe $\tilde{u} \in U^*$ de la forma $\tilde{u} = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ tal que para $\tilde{U} = conv(\vec{0}, e_1, \ldots, e_n, \tilde{u})$ se cumple que $\mathsf{PoE}(I_n, U^*, \gamma) \leq \mathsf{PoE}(I_n, \tilde{U}, \gamma)$.*

Demostración. Como se consideran índices de desigualdad que cumplen la propiedad de invarianza bajo escalamiento, se cumple que $\mathsf{PoE}(I_n, \beta U, \gamma) = \mathsf{PoE}(I_n, U, \gamma)$, donde βU corresponde al conjunto de utilidades U multiplicado por un factor común $\beta > 0$. Asumiremos entonces sin pérdida de generalidad que $\sum_{i=1}^{n} u_i^* = k \in \mathbb{N}$.

Sea el vector $u^* \in [0,1]^n$ y el vector $\tilde{u} = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, tal que sus primeros k términos son iguales a 1, y por ende $\sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i = k$. Dado que se están considerando índices de desigualdad que son Lorenz-consistentes, por la propiedad de Pigou-Dalton vemos que la desigualdad es mayor para el vector $\tilde{u}$. De hecho, dado que u^* es un vector arbitrario que se encuentra ordenado de mayor a menor, podemos construir un vector $\tilde{u}$ transfiriendo utilidades desde el agente i hacia los primeros k términos del vector, aumentando las utilidades de los agentes que originalmente tenían más, por lo que la desigualdad es mayor. Entonces,

$$I_n(\tilde{u}) \geq I_n(u^*). \tag{2.3}$$

Sea un vector de utilidades $u \in U^*$ y su definición como combinación convexa igual a

$$\alpha_0 \vec{0} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \alpha_{n+1} u,$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in [0,1]$ tal que $\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i = 1$. Entonces por (2.3) y por ser Lorenz-consistente, para los vectores $u^* \in [0,1]^n$ y $\tilde{u} = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, dado que existe un cambio en la distribución de utilidades hacia una mayor desigualdad, se cumple

$$I(\alpha_0 \vec{0} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \alpha_{n+1} \tilde{u}) \geq I(\alpha_0 \vec{0} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \alpha_{n+1} u^*). \tag{2.4}$$

Sabemos que la utilidad total de un vector de la forma $\alpha_0\vec{0} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \alpha_{n+1} u$ es

$$\alpha_{n+1} \sum_{i=1}^{n} u_i + 1 - \alpha_{n+1} - \alpha_0. \tag{2.5}$$

Entonces para probar el Lema (2.9), por contradicción, supongamos que

$$\mathsf{PoE}(I_n, U^*, \gamma) > \mathsf{PoE}(I_n, \tilde{U}, \gamma).$$

Además, dado $\mathsf{Welfare}(\tilde{U}) = \mathsf{Welfare}(U^*)$, tenemos que

$$1 - \frac{\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, U^*, \gamma))}{\mathsf{Welfare}(U^*)} > 1 - \frac{\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, \tilde{U}, \gamma))}{\mathsf{Welfare}(\tilde{U})}.$$

Por tanto, bajo el supuesto de la contradicción, se cumple

$$\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, \tilde{U}, \gamma)) > \mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, U^*, \gamma)).$$

Sea $\tilde{u}^{'} = \text{argmax}_{\mathsf{Welfare}(I, \tilde{U}, \gamma)}$. Existen valores $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ tal que

$$\tilde{u}' = \lambda_0\vec{0} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \lambda_{n+1}\tilde{u}.$$

Gracias a (2.4), si se define el vector $u^{**} = \lambda_0\vec{0} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \lambda_{n+1} u^*$ usando las mismas distribuciones de λ_i anteriores, se tiene que

$$I_n(u^{**}) \leq I_n(\tilde{u}^{'}) \leq \gamma.$$

Y por (2.5), el profit de u^{**} y $\tilde{u}'$ son

$$\lambda_{n+1} \sum_{i=1}^{n} u_i^* + 1 - \lambda_{n+1} - \lambda_0 \quad , \quad \lambda_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i + 1 - \lambda_{n+1} - \lambda_0$$

respectivamente. Esto implica que

$$\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, U^*, \gamma)) \geq \mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, \tilde{U}, \gamma))$$

Aquí es donde se llega a una contradicción con el supuesto inicial. $\square$

Para los resultados de las secciones siguientes, inspirados por los lemas anteriores, podemos construir de manera explícita instancias que conllevan precios de la equidad altos. Construiremos dichas instancias en esta sección, las que serán revisitadas más adelante en las secciones respectivas.

Construimos el conjunto convexo generado por los vectores canónicos y $\tilde{u}$, de la forma

$$\lambda_0 \vec{0} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \lambda_{n+1} \tilde{u}.$$

En tanto, la elección de los valores de $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ debe permitir maximizar la utilidad. Dado que se quiere distribuir las utilidades en igualdad a todos los agentes, se construye el vector $\tilde{u}^{(n)}$.

$$\tilde{u}^{(n)} = \frac{1-\Lambda}{n-k} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda \\ \vdots \\ \Lambda \\ \frac{1-\Lambda}{n-k} \\ \vdots \\ \frac{1-\Lambda}{n-k} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Donde los valores relacionados a la combinación convexa que define el vector $\tilde{u}^{(n)}$ son

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0 \\ \lambda_i &= 0, \text{para todo } i \in \{1, \ldots, k\} \\ \lambda_i &= \frac{1}{n-k}(1-\Lambda), \text{para todo } i \in \{k+1, \ldots, n\} \\ \lambda_{n+1} &= \Lambda \end{aligned}$$

Para cada resultado específico, miraremos instancia como la descrita anteriormente y analizaremos cómo se comporta el precio de la equidad en cada caso como función de γ y n.

Capítulo 3

Comportamiento asintótico del precio de la equidad

En este capítulo demostraremos que para cualquier índice de desigualdad, que cumpla continuidad, ser Lorenz-consistente y estandarización, el *precio de la equidad* converge a 1 como función de n para γ fijo. Además, también daremos garantías más finas cuando se pide total equidad (es decir, $\gamma = 0$).

3.1. El caso de $\gamma = 0$

En esta sección se estudia la dependencia del precio de la equidad cuando el número de agentes (n) aumenta y cuando se pide total equidad ($\gamma = 0$) para cualquier índice de desigualdad.

En el siguiente Lema se introduce un resultado conocido y útil para el caso de $\gamma = 0$. Primero, es necesario introducir el *precio de la justicia* (PoF, por la sigla en inglés *Price of Fairness*). El PoF es el precio que se debe pagar por la pérdida de eficiencia en comparación con la eficiencia máxima al incorporar cierta medida de equidad en una asignación de recursos, conocida como α-fairness (ver Sección 1.3).

Lema 3.1 (Bertsimas et al. [2]) *Consideremos un problema de asignación de recursos con n agentes, $n \geq 2$. Sea $U \subseteq [0,1]^n$ el conjunto compacto y convexo de utilidades. Sea $\alpha_k \in \mathbb{R}$ una sucesión creciente tal que $\alpha_k \geq 1$ y $\alpha_k \to \infty$. Entonces:*

$$\limsup_{k\to\infty} \mathsf{PoF}(U; \alpha_k) \leq 1 - \frac{4n}{(n+1)^2}.$$

En el siguiente Lema, usando el resultado del Lema 3.1, obtenemos garantías para el *precio de la equidad* cuando $\gamma = 0$.

Lema 3.2 *Sea* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una familia de índices de desigualdad y dado* $\gamma = 0$. *Entonces, el* PoE *converge a 1 a medida que aumenta el número de agentes* (n).

$$\mathsf{PoE}(I_n, U, \gamma) \leq 1 - \frac{4n}{(n+1)^2}$$

Demostración del Lema 3.2. Observemos que, para cualquier índice de desigualdad, el valor mínimo de éste se alcanza cuando todas las coordenadas tienen igual valor gracias al principio de Pigou-Dalton. Por ende, restringirse al caso $\gamma = 0$ es equivalente a exigir que todas las utilidades sean iguales, en cuyo caso Bertsimas et. al [2], tal como se enuncia en el Lema 3.1, concluye que el PoE corresponde a la expresión propuesta. $\square$

En lo que sigue, demostraremos que el límite 1 de hecho se alcanza, incluso para el caso de más interés donde $\gamma > 0$.

3.2. El caso de $\gamma > 0$

En esta sección demostraremos que, para cualquier índice de desigualdad que cumpla ciertas condiciones necesarias y cualquiera sea el valor de $\gamma \in [0,1]$, el *precio de la equidad* tendrá el mismo comportamiento asintótico. Dicho resultado se formaliza mediante el siguiente teorema, que es nuestro resultado principal.

Teorema 3.3 *Sea* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un índice de desigualdad con* $I_n : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ *y tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *lo siguiente se cumple:*

1. I_n *es continua.*
2. I_n *es Lorenz-consistente.*
3. I_n *es estandarizada.*

Entonces, para todo $\gamma \in [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} PoE(I_n, \gamma) = 1$.

En adelante demostraremos el Teorema 3.3. Para lograr esto, será necesario demostrar la validez de un lema clave en nuestro análisis (ver Lema 3.4).

Consideremos un vector de utilidades $\tilde{u}_n$ de la forma

$$\tilde{u}_n = (1_k, 0_{n-k}) = (1, 1, 1, \ldots, 0, 0, 0),$$

donde los primeros k_n términos son iguales a 1 y los $n-k$ términos corresponden a 0. Definimos k_n de tal forma que

$$I_n(\tilde{u}_n) \geq \gamma + \varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Consideremos ahora la combinación convexa generada por los vectores canónicos, el cero y $\tilde{u}_n$, como $\tilde{U}_n = conv(\vec{0}, e_1, ..., e_n, \tilde{u}_n)$. Observemos que el $\mathsf{Welfare}(\tilde{U}_n)$ corresponde a la suma de los profit de $\tilde{u}_n$. Es decir,

$$\mathsf{Welfare}(\tilde{U}_n) = k_n.$$

Definimos ahora el vector $\tilde{u}^{(n)}$ como en (2.6), de la forma

$$\tilde{u}^{(n)} = (\Lambda_n, \ldots, \Lambda_n, \frac{1-\Lambda_n}{n-k_n}, \ldots, \frac{1-\Lambda_n}{n-k_n}) \in \tilde{U}_n.$$

Por el principio de Pigou-Dalton, tenemos que $I_n(\tilde{u}^{(n)}) \leq I_n(\tilde{u}_n)$. A continuación, demostraremos que para poder obtener que la desigualdad se vuelva $I_n(\tilde{u}^{(n)}) \leq \gamma$, se requiere que Λ_n sea cada vez más pequeño al punto de converger a cero. El siguiente lema permite obtener el comportamiento asintótico de Λ_n.

Lema 3.4 *Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un índice de desigualdad, con $I_n : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ lo siguiente se cumple:*

1. *I_n es continua.*
2. *I_n es Lorenz-consistente.*
3. *I_n es estandarizada.*

Entonces, si para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_n(\tilde{u}^{(n)}) \leq \gamma$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_n = 0$ vía subsucesión.

Demostración. Supongamos por contradicción que $\lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_n \neq 0$. Esto significa que existe $c > 0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \Lambda_n = c > 0$$

Esto quiere decir que para una sucesión monótona decreciente de valores de Λ_n, y para n $\to \infty$, el límite a través de la sucesión es c.

Dada la sucesión monótona decreciente de valores de Λ_n, consideremos un índice n' suficientemente grande de tal forma que $\Lambda_{n'} \geq c - \varepsilon > 0$, para un $\varepsilon > 0$ dado suficientemente pequeño.

Para este elemento n' se construye una subsucesión de Λ_n monótona, tal que la inequidad de $\tilde{u}^{(n)}$ sea a lo más γ. Sea el vector $\tilde{u}^{(n')}$ (2.6) de la forma

$$\tilde{u}^{(n')} = (\Lambda_{n'}, \ldots, \Lambda_{n'}, \frac{1-\Lambda_{n'}}{n'-k_{n'}}, \ldots, \frac{1-\Lambda_{n'}}{n'-k_{n'}}).$$

Entonces por hipótesis, tenemos que

$$I_{n'}(\tilde{u}^{(n')}) \leq \gamma.$$

Consideremos ahora el término $2n'$ de la subsucesión monótona. Ya que tanto sus primeros como sus segundos términos están repetidos una cantidad par de veces, por el principio de replicación sabemos que el índice I_n permanecerá sin variaciones. Es decir, se cumple que

$$I_{2n'}(\tilde{u}^{(2n')}) = I_{n'}((\Lambda_{2n'}, ..., \Lambda_{2n'}, \frac{1-\Lambda_{2n'}}{2n'-k_{2n'}}, ..., \frac{1-\Lambda_{2n'}}{2n'-k_{2n'}})) \leq \gamma,$$

donde $(\Lambda_{2n'}, ..., \Lambda_{2n'})$ corresponde a los $k_{n'}$ términos y $(\frac{1-\Lambda_{2n'}}{2n'-k_{n'}}, ..., \frac{1-\Lambda_{2n'}}{2n'-k_{2n'}})$ a los $n'-k_{n'}$ términos restantes.

En general, para cualquier t, el elemento $\tilde{u}^{(tn')}$ se define de la siguiente manera

$$\tilde{u}^{(tn')} = (\Lambda_{tn'}, ..., \Lambda_{tn'}, \frac{1-\Lambda_{tn'}}{tn'-k_{tn'}}, ..., \frac{1-\Lambda_{tn'}}{tn'-k_{tn'}}),$$

donde $(\Lambda_{tn'}, ..., \Lambda_{tn'})$ corresponde a los $k_{n'}$ términos y $(\frac{1-\Lambda_{tn'}}{tn'-k_{tn'}}, ..., \frac{1-\Lambda_{tn'}}{tn'-k_{tn'}})$ a los $n'-k_{n'}$ términos restantes. Tal que

$$I_{tn'}(\tilde{u}^{(tn')}) = I_{n'}(\tilde{u}^{(tn')}) \leq \gamma.$$

Por el principio de replicación, todos tendrán la misma dimensión n'.

Para concluir, por continuidad de $I_{n'}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \lim_{t\to\infty} I_{n'}(\Lambda_{tn'}, ..., \Lambda_{tn'}, \frac{1-\Lambda_{tn'}}{tn'-k_{n'}}, ..., \frac{1-\Lambda_{tn'}}{tn'-k_{n'}}) \\
= \; & I_{n'}(\lim_{t\to\infty} \Lambda_{tn'}, ..., \lim_{t\to\infty} \Lambda_{tn'}, \lim_{t\to\infty} \frac{1-\Lambda_{tn'}}{tn'-k_{n'}}, ..., \lim_{t\to\infty} \frac{1-\Lambda_{tn'}}{tn'-k_{n'}}) \\
= \; & I_{n'}(c, ..., c, 0, ..., 0) \\
> \; & \gamma,
\end{aligned}$$

donde en la tercera línea utilizamos que $\Lambda_{tn'}$ es monótona decreciente y mayor o igual que c, y además que $\lim_{t\to\infty} \frac{1-\Lambda_{tn'}}{tn'-k_{n'}} = 0$ pues el numerador es a lo más 1 y el numerador es creciente como función de t, además, Gracias al principio de estandarización de I_n tenemos que $I_{n'}(c, ..., c, 0, ..., 0) = I_{n'}(1, ..., 1, 0, ..., 0) = \gamma$, lo que es una contradicción.

□

Ya contamos con todo lo necesario para demostrar el Teorema 3.3.

Demostración del Teorema 3.3. Consideremos el vector $\tilde{u}_n$ y el conjunto $\tilde{U}_n$ como se definieron anteriormente, donde k_n se fija tal que

$$I_n(\tilde{u}_n) \geq \gamma + \varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Notemos que

$$\mathsf{Welfare}(\tilde{U}_n) = k_n.$$

Gracias al Lema 3.4, sabemos que $\Lambda_n \to 0$ vía subsucesión.

Por el principio de Pigou-Dalton sabemos que el $\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, \tilde{U}_n, \gamma))$ se alcanza en $\tilde{u}^{(n)}$. Más en detalle, el vector $\tilde{u}^{(n)}$ se construye de manera tal que, para lograr la condición de $I_n(\tilde{u}^{(n)}) \leq \gamma$, la utilidad total asociada al vector es la mejor que se puede alcanzar en términos de utilidades totales en torno al comportamiento de Λ_n. Si fuera posible encontrar una forma de reinterpretar $\tilde{u}^{(n)}$ con tal de obtener una mejor utilidad total, lo definiremos como $\tilde{v}^{(n)}$. Si buscamos que la distribución de utilidades sea equitativa para los n agentes, por el principio de Pigou-Dalton podemos construir un vector $\tilde{v'}^{(n)}$ que tendrá las mismas características que $\tilde{u}^{(n)}$, es decir, que se asigna utilidades iguales a los agentes que tienen más utilidad e iguales utilidades a aquellos que tienen menos utilidad. Esto implica $I_n(\tilde{v'}^{(n)}) \leq I_n(\tilde{v}^{(n)})$, pero la utilidad total no será mejor que la que se obtiene para $\tilde{u}^{(n)}$. Por tanto, $\tilde{u}^{(n)}$ es el único vector que se puede considerar como óptimo.

Dado que $\tilde{u}^{(n)}$ se construye como $\tilde{u}^{(n)} = ((\Lambda_n)_k, (1-\Lambda_n)_{n-k})$, donde a los primeros k términos se les asigna Λ_n y a los $n-k$ términos se les asigna $1-\Lambda_n$, entonces $\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, \tilde{U}_n, \gamma))$ corresponde a

$$\begin{aligned} \mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, \tilde{U}_n, \gamma)) &= \sum_{j=1}^{k} \tilde{u}_j + \sum_{i=k+1}^{n} \tilde{u}_i \\ &= k\Lambda_n + (1 - \Lambda_n) \end{aligned}$$

Una vez obtenidos $\mathsf{Welfare}(\tilde{U}_n)$ y $\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, \tilde{U}_n, \gamma))$, calculamos el precio de la equidad como se define en (2.6).

Finalmente, se obtiene que el precio de la equidad converge a 1 cuando n aumenta.

$$\begin{aligned} \mathsf{PoE}(\tilde{U}_n, I, \gamma) &= 1 - \frac{\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(I_n, \tilde{U}_n, \gamma))}{\mathsf{Welfare}(\tilde{U}_n)} \\ &= 1 - \frac{k_n\Lambda_n + 1 - \Lambda_n}{k_n} \\ &= 1 - \Lambda_n - \frac{1 - \Lambda_n}{k_n} \\ &\to 1 \end{aligned}$$

En la tercera línea sabemos que $\Lambda_n \to 0$ vía subsucesión y $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\Lambda_{tn'}}{k_{n'}} = 0$ pues el numerador es a lo más 1 y k_n es creciente en función de n. $\square$

Capítulo 4

Análisis ajustado para Simpson

En este capítulo se realiza un análisis ajustado para el índice de Simpson para demostrar que el PoE no converge a 1 cuando aumenta el número de agentes (n). Esto no contradice el Teorema 3.3 ya que el índice de Simpson no cumple la condición necesaria de estandarización. Además de esta condición, también se pide que el índice de desigualdad sea continuo y Lorenz-consistente.

A continuación, utilizando los Lemas (2.8) y (2.9), los cuáles contribuyen a probar que se puede acotar el PoE a conjuntos para cualquier índice de desigualdad I_n, se puede validar el Teorema (4.1) y demostrar que $\mathsf{PoE}(S_n, U, \gamma)$ no depende de n.

Teorema 4.1 *Sea S_n el índice de Simpson, $S_n : \mathbb{R}^n \to [\frac{1}{n}, 1]$ con $n \geq \frac{1}{\gamma}$ y u_i las utilidades factibles de un vector de utilidades $u \in U \subseteq \mathbb{R}^n$. Se cumple*

$$\mathsf{PoE}(S_n, U, \gamma) \leq 1 - \frac{4\lceil \frac{1}{\gamma} \rceil}{(\lceil \frac{1}{\gamma} \rceil + 1)^2}$$

Demostración. Mediante los Lemas 2.8 y 2.9, podemos restringirnos a conjuntos que nos permitan construir el peor caso.

Sea un vector de utilidades cualquiera $u \in [0, 1]^n \in U$, el índice de Simpson se define como

$$S_n(u) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\right)^2}.$$

Sea el vector de utilidades $\tilde{u} = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ y su combinación convexa correspondiente a $\tilde{U} = conv(\vec{0}, e_1, \ldots, e_n, \tilde{u})$, ambos introducidos en el Lema 2.9. En este sentido, tenemos que $\sum_{i=1}^{n} \tilde{u}_i = k$, lo que hace que el índice de Simpson se relacione de la siguiente manera

$$S_n(u) = \frac{1}{k}.$$

Este resultado nos lleva a la conclusión de que

$$S_n(u) = \frac{1}{k} > \gamma + \varepsilon \Leftrightarrow k \sim \frac{1}{\gamma} + \varepsilon.$$

Lo interesante es que esto demuestra que el comportamiento del índice de Simpson no depende de n.

Ya que, $S_n(u) \in [\frac{1}{n}, 1]$, asumiremos que $n \geq \frac{1}{\gamma}$.

Entonces, sea $\tilde{u} = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, con $S_n(\tilde{u}) > \gamma$. Por la propiedad de Pigou-Dalton, se construye el vector $\tilde{u}^{'}$ como en (2.6),

$$\tilde{u}^{'} = (\Lambda, \ldots, \Lambda, \frac{1-\Lambda}{\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil - k}, \ldots, \frac{1-\Lambda}{\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil - k}, 0, \ldots, 0) \in \tilde{U},$$

donde $(\Lambda, \ldots, \Lambda)$ corresponden a los primeros k términos, $(\frac{1-\Lambda}{\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil-k}, \ldots, \frac{1-\Lambda}{\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil-k})$ corresponden a los $\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil - k$ términos y $(0, \ldots, 0)$ corresponden a los $n - \lceil\frac{1}{\gamma}\rceil$ términos restantes, tal que $S_n(\tilde{u}^{'}) \leq \gamma$.

Por tanto, por la propiedad Pigou-Dalton y dados los vectores $u^{'}$ y $\tilde{u}$, se cumple

$$S_n(\tilde{u}^{'}) \leq S_n(\tilde{u}),$$

donde Λ es tal que cumple la siguiente igualdad

$$\Lambda = \frac{1-\Lambda}{\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil - k}.$$

Por lo tanto, Λ es igual a

$$\Lambda = \frac{1}{\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil - k + 1}.$$

Entonces, como se quiere acotar el $\mathsf{PoE}(S_n, U, \gamma)$, se pide al índice cumplir la condición

$$S_n(\tilde{u}^{'}) \leq \gamma \to S_n(\tilde{u}^{'}) = \frac{1}{\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil} \leq \gamma.$$

Similar a casos anteriores, el profit se alcanza en $\tilde{u}^{'}$ y equivale a

$$\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(S_n, \tilde{U}, \gamma)) = k\Lambda + 1 - \Lambda.$$

Por tanto, el PoE corresponde a

$$\begin{aligned}\mathsf{PoE}(S_n,\tilde{U},\gamma) &= 1-\frac{\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(S_n,\tilde{U},\gamma))}{\mathsf{Welfare}(\tilde{U})}\\ &= 1-\frac{k\Lambda+1-\Lambda}{k}\\ &= 1-\frac{k\left(\frac{1}{\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil-k+1}\right)+1-\left(\frac{1}{\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil-k+1}\right)}{k}\\ &= 1-\frac{\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil}{(\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil-k+1)k}\end{aligned}$$

Para hallar el punto crítico, se optimiza la expresión para k y así encontrar una cota superior para el $\mathsf{PoE}(S_n,\tilde{U},\gamma)$ en cuestión. Tal que

$$f(k)=1-\frac{\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil}{(\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil+1-k)k}$$

$$f^{'}(k)=\frac{((\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil+1-k)-k))\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil}{k^2(\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil+1-k)^2}=0\rightarrow k=\frac{\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil+1}{2}.$$

Por tanto, dado k que corresponde al punto crítico que permite hallar una cota superior, se obtiene

$$\mathsf{PoE}(S_n,\tilde{U},\gamma)\leq 1-\frac{4\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil}{(\lceil\frac{1}{\gamma}\rceil+1)^2}.$$

□

Capítulo 5

Análisis ajustado para Gini

En este capítulo se dan garantías más precisas acerca del comportamiento del índice de Gini (G_n) al cumplir las condiciones necesarias de continuidad, Lorenz-consistente y estandarización para cualquier valor de $\gamma \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ y para un n lo suficientemente grande.

Lema 5.1 *Sea un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y convexo de utilidades factibles, dado $\gamma \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ y para un n lo suficientemente grande. Entonces, el* PoE *satisface*

$$\mathsf{PoE}(U, G_n, \gamma) \quad \leq \quad 1 - \frac{1}{(\frac{n-\gamma n-1}{2n})(n - n\gamma - (\frac{n-\gamma n-1}{2n})n - 1) + 1}.$$

Demostración del Lema 5.1. Consideremos el elemento $\tilde{u} \in U$ como

$$\tilde{u} = (1_k, 0_{n-k}) = (1, 1, 1, \ldots, 0, 0, 0),$$

tal que los primeros k términos corresponde a $\sum_i^n u_i = k$. El índice de Gini cumple la condición

$$G_n(\tilde{u}) \geq \gamma + \varepsilon \quad , \quad \varepsilon \geq 0.$$

Dado el vector de utilidades $\tilde{u}$, estamos interesados en las diferencias de desigualdad que hay entre la asignación de utilidad de cada agente. Entonces, mediante estandarización se establece tal inequidad para el índice de Gini mediante una constante común. Tal constante común corresponde a

$$\begin{aligned} G_n(\tilde{u}) &= \frac{\sum_{i=1}^{k}(n-2i+1)u_i}{nk} \\ &= \frac{nk - \frac{2k(k+1)}{2} + k}{nk} \\ &= 1 - \frac{k}{n} \end{aligned}$$

Gracias a esto, si exigimos que $G_n(\tilde{u})$ sea mayor que γ, obtenemos que k depende linealmente de n.

$$1 - \frac{k}{n} > \gamma \Leftrightarrow n(1-\gamma) > k$$
$$k^* = \ominus(n) \sim n(1-\gamma-\varepsilon).$$

El valor de γ se define para $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ dada la definición del índice de Gini (1). Si nos situamos en el caso en que se tienen dos agentes ($n = 2$), si a uno de estos se le asigna toda la utilidad del conjunto U, el índice de Gini va a ser a lo más $\frac{1}{2}$.

Gracias a los Lemas 2.8 y 2.9, podemos restringirnos a estudiar el comportamiento del PoE en $\tilde{U}$. Para esto se toma la combinación convexa del vector $\tilde{u}$ como

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= conv(\vec{0}, e_1, \ldots, e_n, \tilde{u}) \\ \tilde{U} &= \lambda_0\vec{0} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \lambda_{n+1}\tilde{u}, \end{aligned}$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Por el principio de Pigou-Dalton se construye el vector $\tilde{u}^{(n)}$, como se establece en el Lema 3.4, dada la siguiente distribución

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0 \\ \lambda_i &= 0, \text{para todo } i \in \{1, \ldots, k\} \\ \lambda_i &= \frac{1}{n-k}(1-\Lambda), \text{para todo } i \in \{k+1, \ldots, n\} \\ \lambda_{n+1} &= \Lambda. \end{aligned}$$

Entonces, el vector $\tilde{u}^{(n)}$ corresponde a

$$\tilde{u}^{(n)} = (\Lambda, \ldots, \Lambda, \frac{1-\Lambda}{n-k}, \ldots, \frac{1-\Lambda}{n-k})$$

Se espera comprender cuánto distribuir los valores de Λ_n para que las asignaciones sean justas y se satisfaga la condición de $G_n(\tilde{u}^{(n)}) \leq \gamma$ al menor costo posible.

Considerando este vector $\tilde{u}^{(n)}$, el índice de Gini se construye como

$$
\begin{aligned}
G_n(\tilde{u}^{(n)}) &= \frac{\sum_{i=1}^{k}(n-2i+1)\Lambda + \sum_{i=k+1}^{n}(n-2i+1)(\frac{1-\Lambda}{n-k})}{n(1+(k-1)\Lambda)} \\
&= \frac{\Lambda(nk-k^2) - \frac{1-\Lambda}{n-k}(nk-k^2)}{n(1+(k-1)\Lambda)} = \frac{(nk-k^2)(\Lambda - \frac{1-\Lambda}{n-k})}{n(1+(k-1)\Lambda)} \\
&= \frac{k(n-k)(\frac{\Lambda(n-k)-1+\Lambda}{(n-k)})}{n(1+(k-1)\Lambda)} = \frac{k((\Lambda(n-k+1)-1))}{n(1+(k-1)\Lambda)} \\
&= \frac{k(\Lambda(n-k+1)-1)}{n(1+(k-1)\Lambda)} \leq \gamma
\end{aligned}
$$

De esta expresión, se despeja Λ

$$
\Lambda \leq \frac{\gamma n + k}{k(n-k+1) - \gamma n(k-1)}.
$$

Luego, dado Λ y $k = (1-\gamma-\varepsilon)n$ y $\tilde{u}^{(n)}$, el que al igual que en los casos anteriores logra la máxima utilidad total. Entonces, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(G_n, \tilde{U}, \gamma)) &= \sum_{j=1}^{k} \tilde{u}_j + \sum_{i=k+1}^{n} \tilde{u}_i \\
&= k\Lambda + (1-\Lambda) \\
&= 1 + (k-1)\Lambda \\
&= 1 + (k-1)\Big(\frac{\gamma n + k}{k(n-k+1) - \gamma n(k-1)}\Big) \\
&= \frac{nk}{k(n-k+1) - \gamma n(k-1)} \\
&= \frac{n^2(1-\gamma-\varepsilon)}{n^2(1-\gamma-\varepsilon) - n^2(1-\gamma-\varepsilon)^2 + n\frac{(1-\gamma-\varepsilon)}{n} - \gamma n^2(1-\gamma-\varepsilon) + \frac{\gamma n}{n}} \\
&= \frac{1-\gamma-\varepsilon}{(1-\gamma-\varepsilon) - (1-\gamma-\varepsilon)^2 + \frac{1-\gamma-\varepsilon}{n} - \gamma(1-\gamma-\varepsilon) + \frac{\gamma}{n}} \\
&= \frac{1}{\varepsilon + \frac{1}{n} + \frac{\gamma}{n(1-\gamma-\varepsilon)}}
\end{aligned}
$$

Una vez obtenidos $\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(G_n, \tilde{U}, \gamma))$ y $\mathsf{Welfare}(\tilde{U}) = k = n(1-\gamma-\varepsilon)$, podemos calcular el $\mathsf{PoE}(G_n, \tilde{U}, \gamma)$, obteniendo

$$\begin{aligned}\mathsf{PoE}(G_n, \tilde{U}, \gamma) &= 1 - \frac{\mathsf{Welfare}(\mathcal{F}(G_n, \tilde{U}, \gamma))}{\mathsf{Welfare}(\tilde{U})} \\ &= 1 - \frac{1}{(1-\gamma-\varepsilon)\varepsilon n + 1 - \varepsilon}\end{aligned}$$

En tanto, el máximo valor que puede tomar ε es

$$\begin{aligned}&\max_{\varepsilon}(1-\gamma-\varepsilon)\varepsilon n + 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon \leq 1 - \gamma\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\frac{d}{d\varepsilon}(\varepsilon n - \gamma\varepsilon n - \varepsilon^2 n + 1 - \varepsilon) = 0 \\ &\varepsilon = \frac{n - \gamma n - 1}{2n}\end{aligned}$$

Finalmente, la expresión de $\mathsf{PoE}(G_n, \tilde{U}, \gamma)$ que permite comprender el comportamiento del índice de Gini para un n lo suficientemente grande es

$$\begin{aligned}\mathsf{PoE}(G_n, \tilde{U}, \gamma) &\leq 1 - \frac{1}{(1-\gamma-\varepsilon)\varepsilon n + 1 - \varepsilon} \\ &\leq 1 - \frac{1}{(\frac{n-\gamma n-1}{2n})(n - n\gamma - (\frac{n-\gamma n-1}{2n})n - 1) + 1}.\end{aligned}$$

$\square$

Bibliografía

[1] Xiaohui Bei, Xinhang Lu, Pasin Manurangsi, and Warut Suksompong. The price of fairness for indivisible goods. *Theory of Computing Systems*, 65, 10 2021.

[2] Dimitris Bertsimas, Vivek F. Farias, and Nikolaos Trichakis. On the efficiency-fairness trade-off. *Management Science*, 58(12):2234–2250, 2012.

[3] T. Breugem, T. Dollevoet, and D. Huisman. Is equality always desirable? analyzing the trade-off between fairness and attractiveness in crew rostering. *Management Science*, 68(4):2619–2641, 2022.

[4] Maxime C. Cohen, Adam N. Elmachtoub, and Xiao Lei. Price discrimination with fairness constraints. *Management Science*, 68(12):8536–8552, 2022.

[5] Jean-Yves Duclos. Gini indices and the redistribution of income. *International Tax and Public Finance*, 7(2):141–162, 2000.

[6] Frank Farris. The gini index and measures of inequality. *American Mathematical Monthly*, 117:851–864, 12 2010.

[7] James E. Foster. Inequality measurement. 33:31–68, 1985.

[8] Joseph L Gastwirth. Is the gini index of inequality overly sensitive to changes in the middle of the income distribution? *Statistics and Public Policy*, 4(1):1–11, 2017.

[9] Michael Grabchak, Eric Marcon, Gabriel Lang, and Zhiyi Zhang. The generalized simpson's entropy is a measure of biodiversity. *PLoS ONE*, 12(3):e0173305, 2017.

[10] Brian Hibbs and Gihoon Hong. An examination of the effect of immigration on income inequality: A gini index approach. *Economics Bulletin*, 35(1):650–656, 2015.

[11] Barbara Jancewicz. Income inequalities: axioms of income inequality measures and people's perceptions. *Decyzje*, 13:21–42, 06 2016.

[12] F. Sánchez-Sánchez L. Plata-Pérez, J. Sánchez-Pérez. An elementary characterization of the gini index. *Mathematical Social Sciences*, 74:79–83, 2015.

[13] Casilda Lasso de la Vega, Ana Urrutia, and Oscar Volij. An axiomatic characterization of the theil inequality ordering. *Economic Theory*, 54, 08 2012.

[14] Jonathan Levy, Susan Chemerynski, and Jessica Leibler. Incorporating concepts of inequality into health benefits analysis. *International journal for equity in health*, 5:2, 02 2006.

[15] Asha S Manek, P Deepa Shenoy, and M Chandra Mohan. Aspect term extraction for sentiment analysis in large movie reviews using gini index feature selection method and svm classifier. *World wide web*, 20:135–154, 2017.

[16] Manus I Midlarsky. Rulers and the ruled: Patterned inequality and the onset of mass political violence. *American political science Review*, 82(2):491–509, 1988.

[17] Patrick Moyes. An extended gini approach to inequality measurement. *The Journal of Economic Inequality*, 5:279–303, 2007.

[18] Michael J. Fry Muer Yang, Theodore T. Allen and W. David Kelton. The call for equity: simulation optimization models to minimize the range of waiting times. *IIE Transactions*, 45(7):781–795, 2013.

[19] Gaia Nicosia, Andrea Pacifici, and Ulrich Pferschy. Price of fairness for allocating a bounded resource. *European Journal of Operational Research*, 257, 08 2015.

[20] Lars Osberg. On the limitations of some current usages of the gini index. *Review of Income and Wealth*, 63(3):574–584, 2017.

[21] Anthony F. Shorrocks. Inequality decomposition by population subgroups. *Econometrica*, 52(6):1369–1385, 1984.

[22] Paul Somerfield, K. Clarke, and Richard Warwick. Simpson index. *Encyclopedia of Ecology*, pages 3252–3255, 12 2008.

[23] S Sivagama Sundhari. A knowledge discovery using decision tree by gini coefficient. In *2011 International Conference on Business, Engineering and Industrial Applications*, pages 232–235. IEEE, 2011.

[24] Pál Susánszky, Róbert Somogyi, and Gergely Tóth. Political inequality in participation index-a gini-based measure of inequalities in political participation. *Rationality and Society*, 35(2):231–255, 2023.

[25] Gocha Tutberidze, Ketevan Pipia, and Givi Rakviashvili. The measuring of the gini, theil and atkinson indices for georgia republic and some other countries. *Globalization and business*, 3(5), 06 2018.

[26] Rami Zwick and Xiao-Ping Chen. What price fairness? a bargaining study. *Management Science*, 45, 03 1999.

Apéndice A

Precio de la equidad para Gini con dos agentes

En el capítulo 5, se lleva a cabo un análisis ajustado para el índice de Gini (G_n) a medida que n aumenta, para valores de $\gamma \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$. En este Apéndice A, se realiza un análisis similar, específico para el caso en que se tienen 2 agentes ($n = 2$). Esto con el propósito de determinar el valor que toma el $\mathsf{PoE}(G_2, U, \gamma)$ para valores $\gamma \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$.

Dada la definición del índice de Gini (1), para el caso especial de $n = 2$ tenemos que

$$G_2(u) = \frac{|u_1 - u_2| + |u_2 - u_1|}{4|u_1 + u_2|}.$$

Consideraremos dos agentes que tienen utilidades máximas alcanzables iguales, con un valor de 1. En la Figura A.1 se ve representado los dos agentes, las utilidades alcanzables iguales de ambos, las cuales son $(u_1, u_2) = (0, 1)$ y $(u_1, u_2) = (1, 0)$ respectivamente. Además, (u_1^*, u_2^*) corresponde al punto donde se maximiza la utilidad total, el cual define las rectas $L1$ y $L2$. Estas rectas se utilizan para visualizar y definir la relación entre las utilidades de los agentes. Mientras que para obtener la región donde $G_2(u) \leq \gamma$, se definen las rectas G_1 y G_2 como:

$$G_1 : u_2 = \frac{1 + 2\gamma}{1 - 2\gamma} u_1. \quad G_2 : u_2 = \frac{1 - 2\gamma}{1 + 2\gamma} u_1.$$

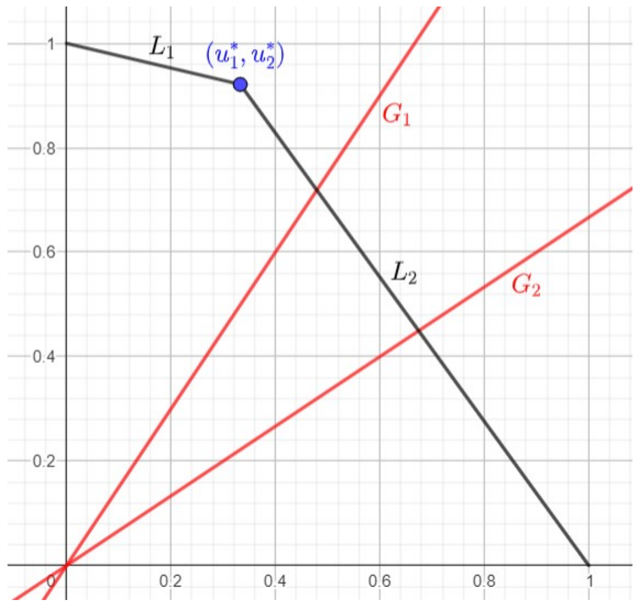

Figura A.1: El poliedro representa la región de utilidades factibles para dos agentes, ambos con utilidades máximas alcanzables iguales a 1. Dentro de esta representación, las rectas G_1 y G_2 indican la restricción de equidad. Y la región que se encuentra entre estas corresponde a las combinaciones de utilidades cuyo índice de Gini es al menos γ.

Las rectas $L1$ y $L2$ se obtienen a partir de los puntos $(u_1, u_2) = (0, 1)$ y $(u_1, u_2) = (u_1^*, u_2^*)$ respectivamente, así como los de los puntos $(u_1, u_2) = (1, 0)$ y $(u_1, u_2) = (u_1^*, u_2^*)$.

$$L1 : u_2 = \frac{u_2^* - 1}{u_1^*} u_1 + 1. \quad L2 : u_2 = \frac{u_2^*}{u_1^* - 1} u_1 + \frac{u_2^*}{1 - u_1^*}.$$

El óptimo bajo restricciones de igualdad se obtiene en el punto donde las rectas $L2$ y G_1 se intersectan, obteniendo el siguiente valor para u_1:

$$u_1 = \frac{u_2^*(2\gamma - 1)}{(u_1^* - 1)(1 + 2\gamma) - u_2^*(1 - 2\gamma)},$$

y el valor de u_2 como:

$$u_2 = \frac{1 + 2\gamma}{1 - 2\gamma} u_1$$

Se reemplaza esta expresión para u_1^*, obteniendo entonces que:

$$u_2 = \frac{2u_2^*}{u_2^*(1 - 2\gamma) - (u_1^* - 1)(1 + 2\gamma)}$$

Por otro lado, se conoce que el punto (u_1^*, u_2^*) que maximiza la suma de las utilidades máximas alcanzables iguales dentro de la región factible es:

$$\mathsf{Welfare}(U) = u_1^* + u_2^*.$$

Tomando en consideración lo anterior, el peor caso se alcanza en el borde, donde $u_2^* = 1$, es decir, para $\mathsf{Welfare}(U) = u_1^* + 1$. Para verificar esto, se calcula el $\mathsf{PoE}(G_2, U, \gamma)$, que corresponde a:

$$\mathsf{PoE}(G_2, U, \gamma) = 1 - \frac{2}{(2 - u_1^* - 2\gamma u_1^*)(u_1^* + 1)}.$$

Para hallar un punto (u_1^*, u_2^*) que toma un valor que conlleva al peor caso, se optimiza la expresión para u_1^* para encontrar la cota en cuestión.

$$max \quad 1 - \frac{2}{(2 - u_1^* - 2\gamma u_1^*)(u_1^* + 1)}$$

Obteniendo:

$$u_1^* = -8\gamma u_1^* - 4u_1^* + 2 - 4\gamma.$$

Esta cota de u_1^* nos permite hallar el peor caso de $\mathsf{PoE}(G_2, U, \gamma)$ para $\gamma \in [0, \frac{1}{2}]$.

$$\mathsf{PoE}(G_2, U, \gamma) = 1 - \frac{8(1 + 2\gamma)}{(3 + 2\gamma)^2}.$$

Si se analiza esta función respecto a $\gamma \in [0, \frac{1}{2}]$, se visualiza que la función va decayendo relativamente, donde para $\gamma = 0$ se acerca a $\frac{1}{9}$ mientras que para $\gamma = \frac{1}{2}$ se acerca a 0. Esto concuerda con que a mayor índice de Gini, menos disminuye la eficiencia al tener una asignación equitativa, mientras que a menor índice de Gini, más se sacrifica la eficiencia para obtener una asignación equitativa.

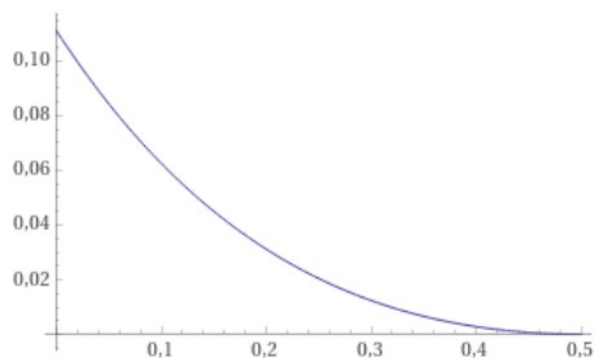

Figura A.2: Análisis del comportamiento del $\mathsf{PoE}(G_2, U, \gamma)$ con $\gamma \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$. Para el caso de $\gamma = 0$, vemos que el $\mathsf{PoE}(G_2, U, \gamma)$ alcanza un valor igual a 1/9. Cuando $\gamma \to \frac{1}{2}$, vemos el que el PoE converge a cero, lo cual es consistente con el hecho de que Gini no restringe la región factible al momento de maximizar utilidades.